DS 8* : samedi 14 mars

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(*CENTRALE PC 20017 *Maths 1)*.
Soit E un ensemble non vide.

On appelle *partition* de E tout ensemble $\mathcal{U} = \{A_1, \dots, A_k\}$ de parties de E tel que
— chaque A_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$ est une partie *non vide* de E ;
— les parties $A_1, \dots, A_k$ sont *deux à deux disjointes*, c'est-à-dire que pour tous $i \neq j$ entre 1 et k, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
— la réunion des A_i forme E tout entier : $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Si $\mathcal{U}$ une partition de E et si k est le nombre d'éléments de $\mathcal{U}$, on dit aussi que $\mathcal{U}$ une *partition de E en k parties.*

I] Nombre de partitions en k parties

I.A Soit k et n deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

Dans tout le problème, pour tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.
On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.

I.B Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k dans les cas suivants :

I.B.1) $k > n$;

I.B.2) $k = 1$.

I.C Montrer que pour tous k et n entiers strictement positifs, on a $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$.
Indication : On pourra distinguer les partitions de $[\![1, n]\!]$ selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.

I.D

I.D.1) Rédiger une fonction Python récursive permettant de calculer le nombre $S(n, k)$, par application directe de la formule établie à la I.C.

I.D.2) Montrer que, pour $n \geq 1$, le calcul de $S(n, k)$ par cette fonction récursive nécessite au moins $\binom{n}{k}$ opérations (sommes ou produits).

Correction :

I.A Chacun des éléments de $[\![1, n]\!]$ doit appartenir à l'une des k parties, il y a donc k possibilités pour chacun des n éléments, le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties est donc majoré par k^n.
Remarque c'est un majorant, en effet k^n est le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en au plus k parties.

I.B

I.B.1) Si $k > n$, $S(n, k) = 0$.

I.B.2) Si $k = 1$, $S(n, 1) = 1$.

I.C On considère une partition de $[\![1, n]\!]$ en k partie.
— Si la partition contient le singleton $\{n\}$, alors en enlevant le singleton $\{n\}$ il reste une partition de $[\![1, n-1]\!]$ en $k - 1$ parties, réciproquement en partant d'une partition de $[\![1, n - 1]\!]$ en $k - 1$ parties, en rajoutant le singleton $\{n\}$ on obtient une partition de $[\![1, n]\!]$ en k parties. Il y a $S(n - 1, k - 1)$ possibilités.

— Si la partition ne contient pas le singleton $\{n\}$, alors en enlevant n de sa partie on obtient une partition de $[\![1, n-1]\!]$ en k parties, réciproquement si on prend une partition de $[\![1, n-1]\!]$ en k parties, en rajoutant n dans l'une des parties (il y a k possibilités) on obtient une partition de $[\![1, n]\!]$ en k parties. Il y a $kS(n-1, k)$ possibilités.

Les deux cas étant bien disjoint, on a montré que $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.

I.D

I.D.1)
```
def S(n,k):
    if n==0 and k==0:
        return 1
    if n==0 or k==0:
        return 0
    return S(n-1,k-1) + k*S(n-1,k)
```

I.D.2) Notons $u(n, k)$ le nombre d'opérations pour calculer $S(n, k)$, si $n \neq 0$ et $k \neq 0$, on a $u(n, k) = u(n-1, k-1) + u(n-1, k) + 2$, ainsi $u(n, k) \geq u(n-1, k-1) + u(n-1, k)$. Comme de plus $u(1, k) = 2 \geq \binom{1}{k}$, on en déduit par récurrence directe (et la formule de Pascal) que $u(n, k) \geq \binom{n}{k}$.

II] Nombres de Bell

Dans toute la suite, on pose pour tout entier $n \geq 0$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$.

II.A Montrer que pour $n \geq 1$, B_n est égal au nombre total de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

II.B Démontrer la formule $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

II.C Montrer que la suite $\left(\frac{B_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

II.D En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.

Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

II.E Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.

II.F En déduire une expression de la fonction f sur $]-R, R[$.

Correction :

II.A Une partition de $[\![1, n]\!]$ peut avoir $1, 2, \ldots, n$ parties, ainsi B_n est le nombre total de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ (et car $S(n, 0) = 0$).

II.B Pour $n \in \mathbb{N}$, Soit une partition de $[\![1, n+1]\!]$, on considère la partie qui contient $n+1$, notons k son nombre d'éléments, ainsi $k \in [\![1, n+1$, il y a $\binom{n}{k-1}$ manière de choisir une telle partie à k éléments, les éléments restant de cette partition forme une partition des $(n+1)-k$ éléments restant, il y a donc B_{n-k+1} possibilités.

Ainsi $B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

II.C Montrons, par récurrence forte sur n, que $B_n \leq n!$:

Initialisation : On a bien $B_1 = 1 \leq 1!$.

Hérédité : Supposons pour $n \geq 1$, que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, que $B_k \leq k!$ et montrons que $B_{n+1} \leq (n+1)!$.

D'après la question précédente : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!$.

Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

Ce qui montre bien que la suite $\left(\frac{B_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

II.D Comme $\left(\frac{B_n}{n!} z^n\right)$ est borné pour $z = 1$, on a $R \geq 1$.

II.E On peut dériver terme à terme et effectuer le produit de Cauchy, pour $x \in]-R, R[$, on a d'une part : $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nB_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n$. Et d'autre part $\mathrm{e}^x f(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ où pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = \frac{B_{n+1}}{n!}$ (d'après II.B).

Ce qui montre bien que $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.

II.F Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' - \mathrm{e}^x y = 0$, il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = C\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$, de plus $f(0) = B_0 = 1$, ainsi $C\mathrm{e} = 1$. On a montré, pour $x \in]-R, R[$, que $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.

III] Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0(X) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $H_k(X) = X(X-1)\cdots(X-k+1)$.

III.A Montrer que la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

III.B

III.B.1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir une expression simplifiée de $H_{k+1}(X) + kH_k(X)$.

III.B.2) En déduire que, pour tout entier naturel n : $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n,k) H_k(X)$.

III.C Soit $k \in \mathbb{N}$.

III.C.1) Montrer que la fonction $f_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k) \frac{x^n}{n!}$ est définie sur $]-1, 1[$.

III.C.2) Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $g_k : x \mapsto \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)^k}{k!}$.

Montrer que la fonction g_k vérifie l'équation différentielle : $y' = \frac{(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + ky$.

III.C.3) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)^k}{k!} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k) \frac{x^n}{n!}$.

III.D

III.D.1) Pour $x \in]-1, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha) \frac{x^k}{k!}$.

III.D.2) Montrer que pour $u < \ln 2$, $\mathrm{e}^{u\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha) \frac{(\mathrm{e}^u - 1)^k}{k!}$.

Correction :

III.A On a tout de suite que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(H_k) = k$ ainsi $(H_0, \dots, H_n)$ est une famille de polynômes non nul de degré échelonnés, donc libre et comme il y a $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments dans cette famille, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.B

III.B.1) On a $H_{k+1}(X) + kH_k(X) = (X-k)H_k(X) + kH_k(X) = XH_k(x)$.

III.B.2) Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : On a $S(0,0)H_0(X) = 1$, ce qui initialise bien la propriété

Hérédité : Supposons $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n,k) H_k(X)$ et montrons que $X^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k) H_k(X)$.

On a (d'après I.C) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k) H_k(X) = \sum_{k=1}^{n+1} (S(n,k-1) + kS(n,k)) H_k(X)$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} S(n,k-1) H_k(X) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) H_{k+1}(X)$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k) H_k(X) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(H_{k+1}(X) + kH_k(X))$ (car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} kS(n,k)) H_k(X) = \sum_{k=1}^{n} kS(n,k)) H_k(X)$ puisque $S(n, n+1) = 0$). Il ne reste plus qu'à utiliser la question précédente pour avoir $\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)H_k(X) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)XH_k(x) = X^{n+1}$ (par HR). Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

III.C **III.C.1)** On a (positivité des $S(n,k)$) :$0 \leq S(n,k) \leq B_n \leq n!$, ainsi $(\frac{S(n,k)}{n!})_n$ est bornée et donc le rayon de convergence R_k de $\sum \frac{S(n,k)}{n!}x^n$ est tel que $R_k \geq 1$, ce qui montre (en autre) que f_k est définie sur $]-1,1[$.

III.C.2) La fonction g_k est dérivable et pour $x \in]-1,1[$, $g_k'(x) = \frac{(k\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{k!} = \frac{((\mathrm{e}^x-1+1)(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} = kg_k(x) + \frac{(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}$. Ainsi la fonction g_k vérifie l'équation différentielle : $y' = \frac{(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + ky$. On notera que cette équation différentielle s'écrit aussi $y' = g_{k-1}(x) + ky$.

III.C.3) Tout d'abord $f_k(0) = 0 = g_k(0)$, ainsi pour montrer $f_k = g_k$ on va montrer que f_k vérifie la même équation différentielle que g_k.
Comme f_k est la somme d'une série entière on peut dériver terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence qui contient $]-1,1[$, ainsi pour $x \in]-1,1[$, $f_k'(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k)\frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=k-1}^{+\infty} S(n+1,k)\frac{x^n}{n!}$, ainsi en utilisant I.C : $f_k'(x) = \sum_{n=k-1}^{+\infty} (S(n,k-1)+kS(n,k))\frac{x^n}{n!} = f_{k-1}(x) + kf_k(x)$.
A ce stade on remarque tout de suite que si on avait $f_{k-1} = g_{k-1}$ alors f_k et g_k sont solution de la même équation différentielle avec la même condition initiale $f_k(0) = g_k(0) = 0$, ainsi $f_k = g_k$. Ce qu'on a fait est en fait l'hérédité de la démonstration de $f_k = g_k$ par récurrence sur k, pour conclure il ne reste plus qu'à initialiser, ce qui est direct puisque $f_0 = 1 = g_0$.
On a bien montré, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$, que $\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k)\dfrac{x^n}{n!}$.

III.D

III.D.1) On sait que : $\forall x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$.
On a donc, pour $x \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\dfrac{x^k}{k!} = (1+x)^\alpha$.

III.D.2) Posons $x = \mathrm{e}^u - 1$, comme $u < \ln 2$, on a $\mathrm{e}^u - 1 < 1$, donc $x \in]-1,1[$, or $\mathrm{e}^{u\alpha} = (1+x)^\alpha$, ainsi $\mathrm{e}^{u\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\dfrac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\dfrac{(\mathrm{e}^u-1)^k}{k!}$.

IV] Fonctions génératrices

On se donne dans la suite un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit m un entier strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ admet un moment d'ordre m fini si Y^m admet une espérance finie, c'est-à-dire si la série $\sum n^m \mathbb{P}(Y = n)$ converge.

On appelle alors moment d'ordre m de Y le réel $\mathbb{E}(Y^m) = \sum_{n=0}^{\infty} n^m \mathbb{P}(Y = n)$

IV.A Montrer que si $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ est une variable aléatoire associée à une fonction génératrice G_Y de rayon strictement supérieur à 1, alors Y admet à tout ordre un moment fini.

IV.B Réciproquement, soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire admettant à tout ordre un moment fini.

IV.B.1) Montrer que la fonction génératrice G_Y est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

IV.B.2) Exprimer $G_Y^{(k)}(1)$ à l'aide des polynômes $H_k(X)$ et de la variable Y.

IV.B.3) La fonction génératrice G_Y a-t-elle nécessairement un rayon de convergence strictement supérieur à 1 ?
Indication : On pourra utiliser la série entière $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}x^n$.

IV.C On suppose dans cette question que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.

IV.C.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \mathbb{E}(Y^n)$.

IV.C.2) En déduire que pour tout polynôme $Q(X)$ à coefficients entiers, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Q(n)}{n!}$ est convergente et sa somme est de la forme $N\mathrm{e}$, où N est un entier.

Correction :

IV.A G_Y est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence qui contient 1 si son rayon de convergence est strictement supérieur à 1, et pour tout $m\in\mathbb{N}$, $G_Y^{(m)}(1)=\sum_{n=m}^{+\infty}n(n-1)\dots(n-m+1)\mathbb{P}(Y=n)$, comme à m fixé on a $n(n-1)\dots(n-m+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}n^m$ on a la convergence de $\sum n^m\mathbb{P}(Y=n)$, ainsi Y admet à tout ordre un moment fini.

IV.B

IV.B.1) Tout d'abord G_Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, pour $m\in\mathbb{N}$, et $t\in]-1,1[$, on a $G_Y^{(m)}(t)=\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty}n(n-1)\dots(n-m+1)\mathbb{P}(Y=n)t^{n-m}$. Par hypothèse $\sum\mathbb{P}(Y=n)n^m$ converge, comme $\|t\to n(n-1)\dots(n-m+1)\mathbb{P}(Y=n)t^{n-m}\|_{\infty,[-1,1]}\leq n(n-1)\dots(n-m+1)\mathbb{P}(Y=n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n^m\mathbb{P}(Y_n)$, on a la cvn sur $[-1,1]$, ainsi $G_Y^{(m)}$ possède une limite finie en 1^- et -1^+ et ce pour tout m, ce qui montre non seulement que G_Y est définie en 1 et -1 mais aussi qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

IV.B.2) On a $G_Y^{(k)}=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n)n(n-1)\dots(n-k+1)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n)H_k(n)$.

IV.B.3) Comme $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on a que $\sum\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge, notons λ sa somme, on peut définir une variable aléatoire Y en posant pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=n)=\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$. Cette variable aléatoire admet, pour tout $m\in\mathbb{N}$, un moment d'ordre m puisque $n^m\mathbb{P}(Y=n)=\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}n^m=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Sa série génératrice est $G_Y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}t^n$. Pour $t>1$, on a $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}t^n=\mathrm{e}^{-\sqrt{n}+n\ln(t)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, ainsi son rayon de convergence est plus petit que 1 donc égal à 1 (convergence pour $t=1$).

IV.C

IV.C.1) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=k)=\mathrm{e}^{-1}\frac{1}{k!}$, ainsi $G_Y(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k)t^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-1}\frac{t^k}{k!}=\mathrm{e}^{t-1}$.
Ainsi $\mathbb{E}(Y^n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-1}\frac{k^n}{k!}$, en utilisant III.B.2, on a $\mathbb{E}(Y^n)=\mathrm{e}^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n}S(n,i)H_i(k)$.
Toutes les séries misent en jeu sont convergente, ainsi $\mathbb{E}(Y^n)=\mathrm{e}^{-1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}S(n,i)\sum_{k=0}^{+\infty}H_i(k)\frac{1}{k!}=\sum_{i=0}^{n}S(n,i)\sum_{k=0}^{+\infty}H_i(k)\mathbb{P}(Y=k)$. Or, en utilisant IV.B.E, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}H_i(k)\mathbb{P}(Y=k)=G_Y^{(i)}(1)=1$ (car pour tout $m\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$, $G_Y^{(m)}(t)=\mathrm{e}^{t-1}$), ainsi $\mathbb{E}(Y^n)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}S(n,i)=B_n$.

IV.C.2) Notons $Q(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$. Pour tout k on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}=\mathrm{e}\mathbb{E}(Y^k)=\mathrm{e}B_k$, ainsi (les séries misent en jeu sont convergente) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Q(n)}{n!}=\mathrm{e}\sum_{k=0}^{d}a_kB_k$ qui est bien le produit de e par un entier.

V] Somme de puissances

On fixe $n\in\mathbb{N}$. On pose l'application linéaire : $\Delta:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}[X]&\to&\mathbb{R}[X]\\P(X)&\mapsto&P(X+1)-P(X)\end{array}$.

V.A À l'aide d'un encadrement par des intégrales, déterminer un équivalent de $U_n(p)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}k^n$, à $n\geq1$ fixé, lorsque p tend vers $+\infty$.

V.B Soit Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur le sous-espace stable $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice A de Δ_n dans la base $(H_0,\dots,H_n)$.

V.C En déduire que $U_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} H_{k+1}(p+1)$.

V.D On note $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\right\}$, puis $G = \text{Vect}\left(X^{2k+1}\ ;\ 0 \leq k \leq n-1\right)$.

Soit $Q(X)$ le polynôme tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $Q(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} k$.

V.D.1) Rappeler l'expression explicite du polynôme $Q(X)$.

V.D.2) Montrer que l'application : $\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} F & \to & G \\ P(X) & \mapsto & \Delta\left(P(Q(X-1)\right) \end{array}$ est un isomorphisme.

V.D.3) En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P_r(X)$ tel que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = P_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$.

V.E

V.E.1) Déterminer le terme dominant dans $P_r(X)$.

V.E.2) Montrer que pour $r \geq 1$, X^2 divise $P_r(X)$.

V.E.3) Expliciter les polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

Correction :

V.A Pour tout k, par croissance de $t \mapsto t^n$, on a $k^n \leq \int_k^{k+1} t^n \mathsf{d}t \leq (k+1)^n$, en sommant ces inégalités, $U_n(p) \leq \displaystyle\int_0^{p+1} t^n \mathsf{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{p} t^n \mathsf{d}t \leq U_n(p)$, ainsi $\frac{p^{n+1}}{n+1} \leq U_n(p) \leq \frac{(p+1)^{n+1}}{n+1}$. Comme $p^{n+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} p^n$, on a $U_n(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p^{n+1}}{n+1}$.

V.B On a $\Delta_n(H_k) = H_k(X+1) - H_k(X) = (X+1)(X)\dots(X+1-k+1) - X(X-1)\dots(X-k+1) = (X+1-X+k-1)H_{k-1}(X) = kH_{k-1}(X)$. Ainsi la matrice A à tous ses coefficients nuls sauf ceux de la sur-diagonales qui valent le numéro de la ligne, ie pour $i \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,i+1} = i$.

V.C La question III.2.B donne $U_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^n = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{n} S(n,i)H_i(k) = \sum_{i=0}^{n} S(n,i) \sum_{k=0}^{p} H_i(k)$.

Or la question précédente donne $(i+1)H_i(k) = H_{i+1}(k+1) - H_{i+1}(k)$, ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} H_i(k) = \frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{p} H_{i+1}(k+1) - H_{i+1}(k) = \frac{1}{i+1}\left(H_{i+1}(p+1) - H_{i+1}(0)\right) = \frac{1}{i+1} H_{i+1}(p+1)$. Ce qui donne bien $U_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} H_{k+1}(p+1)$.

V.D

V.D.1) On a $Q(p) = \frac{p(p+1)}{2}$, ainsi Q et $\frac{X(X+1)}{2}$ coïncident sur tous les entiers, ils sont donc égaux (la différence à une infinité de racines). Donc $Q(X) = \frac{X(X+1)}{2}$.

V.D.2) On a $\Phi(P)(X) = \Delta(P(Q(X-1)) = \Delta(P(\frac{X(X-1)}{2})) = P(\frac{X(X+1)}{2}) - P(\frac{X(X-1)}{2})$.
Tout d'abord Φ est clairement linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Soit $P \in F$, ainsi P est combinaison linéaire des X^k pour $k \in [\![1,n]\!]$. Or $\Phi(X^k) = \dfrac{1}{2^k}X^k(X+1)^k - \dfrac{1}{2^k}X^k(X-1)^k = \dfrac{X^k}{2^k}\left((X+1)^k - (X-1)^k\right) = \dfrac{X^k}{2^k}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}X^{k-i}(1-(-1)^i) = \dfrac{1}{2^k}\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{k}{i}X^{2k-2p-1}$. Ainsi $\Phi(X^k)$ est donc combinaison linéaire de X, X^3, ..., X^{2n-1}, il est donc dans G, par suite Φ est bien une application linéaire de F dans G qui ont la même dimension $n+1$, il ne reste donc plus qu'à montrer l'injectivité de Φ pour avoir sa bijectivité. Soit P dans le noyau de Φ, ainsi $P(\frac{X(X+1)}{2}) = P(\frac{X(X-1)}{2})$, ce qui implique pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k(k+1)/2) = P(0) = 0$, ainsi (infinité de racines) $P = 0$, ce qui montre l'injectivité et donc la bijectivité de Φ.

V.D.3) Soit $n \geq r+1$, par bijectivité de Φ il existe un unique $P_r \in F$ tel que $X^{2r+1} = \Phi(P_r) = P_r(\frac{X(X+1)}{2}) - P_r(\frac{X(X-1)}{2})$.
Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = \sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = P_r(\frac{k(k+1)}{2}) - P_r(\frac{k(k1)}{2}) = P_r(\frac{p(p+1)}{2}) - P_r(0) = P_r(\frac{p(p+1)}{2})$.

V.E

V.E.1) Notons $a_d X^d$ le terme dominant de $P_r(X)$. On a, d'après V.D.3) : $U_{2r+1}(p) = P_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} a_d\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^d$. Or l'équivalent de V.A donne $U_{2r+1}(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{2r+2}}{2r+2}$, ce qui impose $d = r+1$ et $a_d = \frac{2^r}{r+1}$. Ce qui montre que le terme dominant de $P_r(X)$ est $\frac{2^r}{r+1}X^{r+1}$.

V.E.2) On sait déjà que $P_r(0) = 0$ (car P_r est dans F). On dérive l'égalité définissant P_r : $X^{2r+1} = P_r(\frac{X(X+1)}{2}) - P_r(\frac{X(X-1)}{2})$, ainsi $(2r+1)X^{2r} = \frac{2X+1}{2}P_r'(\frac{X(X+1)}{2}) - \frac{2X-1}{2}P_r'(\frac{X(X-1)}{2})$, ainsi pour $r \geq 1$, $0 = \frac{1}{2}P_r'(0) - \frac{-1}{2}P_r'(0)$, ainsi $P_r'(0) = 0$. Ce qui montre que 0 est racine au moins double de P_r et donc que X^2 divise $P_r(X)$.

V.E.3) Le coefficient dominant de P_1 est, d'après V.E.1, X^2, comme il est divisible par X^2, on a $P_1(X) = X^2$.

Le coefficient dominant de P_2 est, d'après V.E.1, $\frac{4}{3}X^3$, comme il est divisible par X^2, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_2(X) = \frac{4}{3}X^3 + \lambda X^2$. On évaluant en 1 l'égalité $X^5 = P_2(\frac{X(X+1)}{2}) - P_2(\frac{X(X-1)}{2})$ on trouve $1 = P_2(1) - P_2(0)$, ainsi $1 = \frac{4}{3} + \lambda$, ainsi $\lambda = \frac{-1}{3}$, d'où $P_2(X) = \frac{4}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2$.