

## Correction

**Exercice 1** (*exercice 1 E3A PSI 2018*).

### Correction :

1. Si on identifie  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  à  $\mathbb{R}$ , alors l'application  $(X, Y) \mapsto X^T Y$  n'est rien d'autre que le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.
  - Montrons (1)  $\Rightarrow$  (2). Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . Soit  $X \in E_\lambda(A)$ . On a  $X^T A X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 \geq 0$ , et donc  $\lambda \geq 0$  puisque  $\|X\|^2 > 0$ .
  - Montrons (2)  $\Rightarrow$  (3). D'après le théorème spectral ( $A$  est symétrique réelle) il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = P^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $A$ . Si ces valeurs propres sont positives, alors on peut poser  $B = P^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$ , ainsi on a  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $B^2 = A$ .
  - Montrons (3)  $\Rightarrow$  (1). Soit  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est tel que  $B^2 = A$ . Pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  on a  $X^T A X = X^T B^2 X = X^T B^T B X = (BX)^T B X = \|BX\|^2 \geq 0$ .

Ce qui montre l'équivalence de ces trois propositions.

2. **2.1.**  $J$  est de rang 1 donc (théorème du rang) 0 est valeur propre et  $\dim E_0(J) = n - 1$ , comme  $\text{tr}(J) = n$  on en déduit que  $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$ . De plus  $E_0(J) = \ker(J)$  est l'hyperplan d'équation  $\sum_{k=1}^n x_k = 0$  et  $E_n(J) = \ker(J - nI_n)$  la droite dirigée par le vecteur colonne  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1.

*Remarque :* On peut aussi donner une base de  $\ker(J)$ , ce sont les  $n - 1$  vecteurs colonnes avec un 1 en premier coefficient, un  $-1$  sur un autre coefficients (qui peut être sur le deuxième, troisième, ... ,  $n$ -ième) et des 0 ailleurs.

Or pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  $JX = \lambda X \iff MX = (\alpha + 1 - \lambda)X$ . D'où  $\text{Sp}(M) = \{\alpha + 1, \alpha + 1 - n\}$ , avec  $\ker(M - (\alpha + 1)I_n) = \ker(J)$  et  $\ker(M - (\alpha + 1 - n)I_n) = \ker(J - nI_n)$ .

2. **2.2.** En utilisant la question précédente et la caractérisation (2) de **1.** :  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \alpha \geq n - 1$ .

La question précédente permet d'avoir :

- si  $\alpha > n - 1$ , alors 0 n'est pas valeur propre de  $M$ , donc  $\text{rg}(M) = n$ .
- si  $\alpha = n - 1$ , alors  $\ker(M) = \ker(J - nI_n)$  est de dimension 1, donc  $\text{rg}(M) = n - 1$ .

Dans tous les cas, on a donc bien  $\text{rg}(M) \geq n - 1$ .

3. **3.1.** La matrice de  $A$  relativement à une BON est symétrique donc  $a$  est un endomorphisme symétrique, ainsi le théorème spectral assure que  $a$  est diagonalisable en base orthonormale, d'où l'existence demandée.
- 3.2. Par définition de  $b$ , sa matrice dans la base orthonormale  $\mathcal{B}$  est symétrique (et même diagonale), donc  $b$  est un endomorphisme symétrique.
- 3.3. La base  $\mathcal{B}$  est une base de diagonalisation de  $b$ , ainsi pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $E_{\lambda_i}(a) = E_{\sqrt{\lambda_i}}(b)$ , d'où l'égalité des deux noyaux.
4. **4.1.** Remarquons que l'on a  $a = b^2$ , puisque ces deux endomorphismes coïncident sur la base  $\mathcal{B}$  de **3.1**. Ainsi puisque  $b$  est symétrique (**3.2**), on a  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ ,  $\langle z_i, z_j \rangle = \langle b(e_i), b(e_j) \rangle = \langle e_i, b^2(e_j) \rangle = \langle e_i, a(e_j) \rangle = a_{i,j}$ .  
En particulier si  $i \neq j$ , alors  $\langle z_i, z_j \rangle < 0$  par hypothèse sur  $A$ .

- 4.1.1. Posons  $I_1 = \{i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \mid \gamma_i \geq 0\}$  et  $I_2 = \{i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \mid \gamma_i < 0\}$ , de sorte que  $I_1$  et  $I_2$  forment une partition de  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  telle que pour tout  $i \in I_1$ ,  $\gamma_i = |\gamma_i|$ , et que pour tout  $i \in I_2$ ,  $\gamma_i = -|\gamma_i|$ .

L'égalité  $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E$  s'écrit alors  $\sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i - \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i = 0_E$ , ie  $\sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i = \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i$ .

Posons  $z$  ce dernier élément, on a  $\langle z, z \rangle = \langle \sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i, \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i \rangle = \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} |\gamma_i| |\gamma_j| \langle z_i, z_j \rangle$ .

Or  $\langle z, z \rangle \geq 0$  et puisque  $I_1$  et  $I_2$  sont disjoints, on a pour  $(i, j) \in I_1 \times I_2$ , que ( $b$  est symétrique d'après **3.2** :  $\langle z_i, z_j \rangle = \langle b(e_i), b(e_j) \rangle = \langle e_i, b^2(e_j) \rangle = \langle e_i, a(e_j) \rangle = a_{i,j} < 0$ , donc  $|\gamma_i| |\gamma_j| \langle z_i, z_j \rangle \leq 0$ .

D'où nécessairement  $\langle z, z \rangle = 0$ , ie  $z = 0_E$ , et ainsi  $\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = \sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i + \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i = z + z = 0_E$ .

**4.1.2.** On a alors  $\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \rangle = \langle 0_E, z_n \rangle = 0$  mais par linéarité,  $\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \langle z_i, z_n \rangle$  est une somme de termes négatifs. Donc  $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $|\gamma_i| \langle z_i, z_n \rangle = 0$ , i.e.  $\gamma_i = 0$  puisque  $\langle z_i, z_n \rangle < 0$ .

On a montré que  $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\gamma_i = 0$ , i.e. que la famille  $(z_1, \dots, z_{n-1})$  est libre.

**4.2.** On vient de montrer que la famille  $(b(e_1), \dots, b(e_{n-1}))$  est libre, donc que  $\text{rg}(b) \geq n-1$ . Or par **3.3** et le théorème du rang, on a  $\text{rg}(b) = \text{rg}(a)$ . Donc  $\text{rg}(a) = \text{rg}(A) \geq n-1$ .

**Exercice 2** (*exercice 1*, E3A PC 2 2018).

**Correction :**

1. Soit  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\vec{x} \in F \iff \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i \times 1 = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i = 0$ , ce qui montre bien le résultat demandé.

2. On peut utiliser la question 1 en introduisant  $f : \vec{x} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$  qui est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , son image est incluse dans  $\mathbb{R}$  et comme  $f(u) = n \neq 0$  son image est égale à  $\mathbb{R}$ , elle est donc de dimension 1, le théorème du rang permet d'en déduire que son noyau, qui n'est rien d'autre que  $F$ , est de dimension  $n-1$ .

*Alternative* : On a  $F = \text{Vect}(\vec{u})^\perp$ , or un espace vectoriel et son orthogonal sont supplémentaires (on est en dimension finie), en particulier  $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(F) + \dim(\text{Vect}(\vec{u}))$ , ainsi  $\dim(F) = n-1$

3. Théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale. La matrice  $A_n$  est symétrique réelle, dont il existe une matrice  $P$  orthogonale et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A_n = P D P^\top$ .

4. Comme  $\vec{x} \in F$  on a  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ . On a donc :  $A_n X = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n x_i \\ \vdots \\ \sum_{i \neq j}^n x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_j \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -X$ .

Dit autrement  $F$  est inclus ( en identifiant  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , ie en identifiant  $X$  et  $\vec{x}$ ) dans l'espace propre  $E_{-1}(A_n)$ .

5. On a  $-1$  valeur propre de multiplicité au moins  $n-1$ , il ne manque donc qu'une seule valeur propre (qui, a priori, peut être  $-1$ ) notons la  $\alpha$  (existe nécessairement, car  $A_n$  est diagonalisable), comme le polynôme caractéristique est scindé (car  $A_n$  est diagonalisable) sa trace vaut la somme des valeurs propres, ainsi  $0 = -(n-1) + \alpha$ , ainsi  $\alpha = n-1$  (*Alternative* : Calculer le polynôme caractéristique de  $A_n$ ).

En conclusion  $\text{Sp}(A_n) = \{-1, n-1\}$ . Déterminons maintenant les sous-espaces propres.

Notons  $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , pour  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a  $E_j - E_1 \in E_{-1}(A_n)$ , or cette famille d'éléments de  $E_{-1}(A_n)$  est libre (car échelonnée) et à autant d'éléments que la dimension de cet espace, on

a donc  $E_{-1}(A_n) = \text{Vect}(E_2 - E_1, \dots, E_{n-1} - E_1)$ . On peut remarquer que  $A_n U = (n-1)U$ , où  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

ainsi  $E_{n-1}(A_n) = \text{Vect}(U)$ .

*Alternative* : On peut tout d'abord remarquer que comme  $A_n$  est diagonalisable (car  $A_n$  symétrique réelle) alors  $\dim(E_{-1}(A_n)) = n-1$ , or on a montré à la question précédente que  $F \subset E_{-1}(A_n)$ , donc  $F = E_{-1}(A_n)$ .

De plus, comme  $A_n$  est symétrique réelle, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, comme il n'y en a que deux, on en déduit que  $E_{n-1}(A_n) = F^\perp$ , or  $F^\perp = \text{Vect}(U)$ .

*Alternative 2* : Résoudre à la main  $A_n X = (n-1)X$ .

6. Comme le polynôme caractéristique de  $A_n$  est scindé, son déterminant vaut le produit des valeurs propres, ie  $\det(A_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$ .

7. On a :  $B_n^\top = \begin{pmatrix} A_n^\top & I_n^\top \\ I_n^\top & A_n^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix} = B_n$ , ainsi  $B_n$  est symétrique réelle, donc diagonalisable.

8. Soit  $\alpha$  une valeur propre de la matrice  $B_n$  et  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé, écrit par bloc, on a  $X \neq 0$  et  $B_n X = \alpha X$ .

On a aussi  $B_n X = \begin{pmatrix} A_n X_1 + X_2 \\ X_1 + A_n X_2 \end{pmatrix}$ , ainsi on a :  $\begin{cases} A_n X_1 + X_2 = \alpha X_1 \\ X_1 + A_n X_2 = \alpha X_2 \end{cases}$ . En sommant les lignes on a  $(A_n + I_n)(X_1 + X_2) = \alpha(X_1 + X_2)$  et en prenant la différence  $(A_n - I_n)(X_1 - X_2) = \alpha(X_1 - X_2)$ .

Si  $X_1 + X_2 \neq 0$  alors  $\alpha$  est valeur propre de  $A_n + I_n$ .

Si  $X_1 + X_2 = 0$ , alors nécessairement  $X_1 - X_2 \neq 0$  (en effet sinon on en déduirait  $X_1 = X_2 = 0$  et donc que  $X = 0$ , ce qui n'est pas le cas) et dans ce cas  $\alpha$  est valeur propre de  $A_n - I_n$ .

9. Soit  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , si  $X$  est vecteur propre de valeur propre  $\beta$  de  $A_n$  alors  $(A_n + I_n)X = (\beta + 1)X$  et donc  $X$  est vecteur propre de valeur propre  $\beta + 1$  de  $A_n + I_n$ , comme  $A_n$  est diagonalisable, il existe une base de vecteur propres de  $A_n$ , c'est donc aussi une base de vecteur propre de  $A_n + I_n$ , ainsi  $\text{Sp}(A_n + I_n) = \{\beta + 1, \beta \in \text{Sp}(A_n)\} = \{0, n\}$ . De même on a  $\text{Sp}(A_n - I_n) = \{\beta - 1, \beta \in \text{Sp}(A_n)\} = \{-2, n - 2\}$ . Avec la question précédente on a bien  $\text{Sp}(B_n) \subset \{-2, 0, n - 2, n\}$ .

10. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A_n)$  et  $X_1$  un vecteur propre de  $A_n$  de valeur propre  $\lambda$ , ie  $X_1 \neq 0$  et  $A_n X_1 = \lambda X_1$ , posons  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$ , on a  $B_n X = \begin{pmatrix} A_n X_1 + X_1 \\ X_1 + A_n X_1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)X$ , ainsi  $\lambda + 1$  est valeur propre de  $B_n$ , de même en prenant  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}$  on a  $\lambda - 1$  valeur propre de  $B_n$ . Ce qui montre que  $\{-2, 0, n - 2, n\} \subset \text{Sp}(B_n)$  et donc l'égalité.

11. On peut procéder comme en 8 et 10 pour avoir  $\text{Sp}(U_M) = \text{Sp}(M + I_n) \cup \text{Sp}(M - I_n) = \{\alpha_i \pm 1, i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$ , en effet on a uniquement utilisé que  $A_n$  était diagonalisable (pas qu'elle était symétrique).

12. Comme  $M$  est diagonalisable, il existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $M = PDP^{-1}$ .

Les colonnes de  $P$  sont des vecteurs propres de  $M$ , or la démonstration de 8 nous dit que si  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  est

vecteur propre de  $M$  alors  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $U_M$ , ce qui nous pousse à poser la

matrice par blocs  $Q = \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$  (car ses colonnes sont des vecteurs propres de  $U_M$ ), pour conclure quand au fait que  $U_M$  est diagonalisable il suffit donc de montrer que  $Q$  est inversible, or c'est le cas, pour cela il suffit de remarquer que la matrice  $R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} \\ P^{-1} & -P^{-1} \end{pmatrix}$  est telle que  $QR = I_{2n}$ , elle est donc son inverse.

On a donc montré l'existence d'une matrice inversible dont les vecteurs colonnes sont des vecteurs propres de  $U_M$  (version matricielle de : il existe une base constituée de vecteurs propre) donc  $U_M$  est diagonalisable.

*Alternative* : On peut poser la même matrice  $Q$ , donner  $Q^{-1}$  et calculer  $Q^{-1}U_M Q$  pour voir qu'elle est diagonale (c'est  $\begin{pmatrix} D + I_n & 0 \\ 0 & D - I_n \end{pmatrix}$ ).