DNS 9⋆ : pour le mercredi 25 mars

Correction

Centrale-Supélec 2024 Maths 1

I Quelques approximations de $\sqrt{2}$.

I.A- Via un développement en série entière.

Correction :

Q1. Si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors pour $n \geq \alpha+1$, $a_n = 0$, ainsi $R = +\infty$.
Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, $u_n = a_n x^n$, ainsi $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$, ainsi $\sum u_n$ converge si $|x| < 1$, donc $R \geq 1$, et $\sum u_n$ diverge si $|x| > 1$ donc $R \leq 1$ d'où $R = 1$.

Q2. Pour $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1+x)^\alpha$.

Q3. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $a_n = \displaystyle\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)\frac{2n-1}{2n-1}\frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}\prod_{k=1}^{2n} k \frac{2n-1}{2n-1}\frac{1}{2^n\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Ce qui montre bien, pour tout $x \in]-1,1[$, que $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} b_n x^n$.

Q4. Avec la formule de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$, on trouve $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\frac{1}{2^{2n}(2n-1)}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{4\pi n}\frac{e^{2n}}{n^{2n}2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$, comme $\frac{3}{2} > 1$, par théorème de comparaison des séries à termes positives, $\sum b_n$ converge, ainsi $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge absolument donc converge.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x \mapsto (-1)^{n+1} b_n x^n\|_\infty^{[-1,1]} \leq b_n$, ainsi $\sum (-1)^{n+1} b_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$, comme de plus tous les $x \mapsto x \mapsto (-1)^{n+1} b_n x^n$ sont continues sur $[-1,1]$ la somme de la série entière est continue sur $[-1,1]$, ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} b_n = \sqrt{2}$ (par passage à la limite l'égalité de **Q3**).

Q6. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1} b_k$, le reste de la série $\sum(-1)^{n+1} b_n$, cette série est alternée, son terme général b_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$, de plus $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{4(2n+1)(n+1)^2} = \frac{2n-1}{2n+2} \leq 1$, ainsi (b_n) est décroissante, la série relève donc du TSA, on a donc la majoration du reste : $|R_n| \leq b_{n+1}$, or d'après l'équivalent de **Q4**, on a $n^{3/2}|R_n| \leq n^{3/2} b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, ainsi $(n^{3/2} R_n)$ est bornée, ce qui donne que $R_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Ce qui montre bien que $\sqrt{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1} b_k + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

I.B- Via la méthode de Héron d'Alexandrie.

Correction :

Q7. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.
Initialisation : On a $c_0(a) = 1 > 0$.
Hérédité : On suppose que $c_n(a) > 0$, ainsi $c_{n+1}(a)$ existe bien et $c_{n+1}(a) = \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right) > 0$, la propriété est donc vérifiée au rang $n+1$.
On a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est défini et est strictement positif.

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $c_{n+1}(a)^2 - a = \dfrac{1}{4}\left(c_n(a) + \dfrac{a}{c_n(a)}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(c_n(a)^2 + 2a + \dfrac{a^2}{c_n(a)^2}\right) - \dfrac{1}{4}4a = \dfrac{1}{4}\left(c_n(a)^2 - 2a + \dfrac{a^2}{c_n(a)^2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(c_n(a) - \dfrac{a}{c_n(a)}\right)^2 = \dfrac{(c_n(a)^2 - a)^2}{4c_n(a)^2}$. Ceci implique que $c_{n+1}(a)^2 - a \geq 0$. Ainsi pour tout $n \geq 1$, $c_n(a)^2 \geq a$, et comme $c_n(a) > 0$, on en déduit $c_n(a) \geq \sqrt{a}$.

Q9. Pour $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1}(a) - c_n(a) = \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right) - c_n(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c_n(a)} - c_n(a)\right) = \frac{a - c_n(a)^2}{2c_n(a)} \leq 0$ (car $c_n(a)^2 \leq a$), ainsi $(c_n(a))$ est décroissante, comme elle est minorée par $\sqrt{a}$ elle converge vers un certain $\ell \geq \sqrt{a}$, en passant à la limite dans la relation de récurrence on a $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$, ie $2\ell = \frac{\ell^2 + a}{\ell}$, ie $\ell^2 = a$ et donc $\ell = \sqrt{a}$ (par positivé de ℓ)

Q10. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$, que $c_n(2)^2 - 2 \leq 8\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$.
Initialisation : On a $c_1(2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Ainsi $c_1(2)^2 - 2 = \frac{1}{4} = 8\left(\frac{1}{32}\right)^1$, ce qui initialise la propriété.
Hérédité : supposons $c_n(2)^2 - 2 \leq 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$ pour un certain $n \geq 1$, on a $c_{n+1}(2)^2 - 2 = \dfrac{(c_n(2)^2 - 2)^2}{4c_n(2)^2} \underset{\text{(HR)}}{\leq}$

$$\frac{16}{c_n(2)^2}\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \leq 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n1}}$$ (puisque $c_n(2)^2 \geq 2$). Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

De plus pour $n \geq 1$, $\left|c_n(2) - \sqrt{2}\right| = \frac{c_n^2(2) - 2}{c_n(2) + \sqrt{2}}$. Il ne reste plus qu'à utiliser l'inégalité qu'on vient de démontrer que que $c_n(2) + \sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$ pour avoir : $\left|c_n(2) - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{8}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$. En conclusion on a bien montré $\sqrt{2} = c_n(2) + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$.

I.C- Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$: vitesses de convergence.

Correction :

Q11. La suite $\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$ converge plus vite vers 0 que $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, en effet (par croissance comparée) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}} = 0$, ie $\frac{1}{n^{3/2}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$.

Q12. D'après **Q10** on a : $\left|c_n(2) - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{8}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}} \leq 4\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$ (où on a utilisé $\sqrt{2} \geq 1$). Ainsi pour n tel que $4\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}} < 10^{-11}$ on a que $c_n(2)$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.

```
c=3/2
n=1
eps=10**(-11)
while 4*(1/32)**(2**(n-1))>=eps:
    c=(c+2/c)/2
    n+=1
print(c)
```

II Racine carrée d'une matrice symétrique positive.

II.A- Racines carrées de la matrice I_2.

Correction :

Q13. Les matrices de $\mathrm{O}(2)$ sont les $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et les $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Q14. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $S_\theta^2 = \mathrm{I}_2$, de plus on a $(R_\theta)^2 = R_{2\theta}$ et comme $R_\tau = \mathrm{I}_2$ si et seulement si $\tau \in \pi\mathbb{Z}$, on en déduit donc que les racines carrées de I_2 qui sont dans $\mathrm{O}(2)$ sont $R(0)$, $R(\pi)$ et toutes les matrices S_θ, il y en a donc une infinité.

II.B- Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive.

Correction :

Q15. Soit $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$, on a que M est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

Q16. Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$, comme M est symétrique réelle, d'après le théorème spectrale il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_q(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $M = PDP^\top$, notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ les valeurs propres de M, comme M est positive, tous les λ_i sont positifs, ainsi on peut poser $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_q})$, de telle sorte à avoir $\Delta^2 = D$, il suffit de poser $B = P\Delta P^\top$, et on a $B^2 = P\Delta^2 P^\top = PDP^\top = M$, comme les valeurs propres de B sont toutes positives on a bien $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

Q17. Soit $C \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = M$, on veut montrer que $B = C$. Pour cela on va montrer pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, que $\ker(M - \lambda I_q) = \ker(C - \sqrt{\lambda} I_q)$.

Tout d'abord si $x \in \ker(C - \sqrt{\lambda} I_q)$ alors $Cx = \sqrt{\lambda} x$ ainsi $Mx = C^2 x = \sqrt{\lambda} Cx = \lambda x$ ce qui montre $\ker(C - \sqrt{\lambda} I_q) \subset \ker(M - \lambda I_q)$.

— Supposons $\lambda \neq 0$, On a $M - \lambda I_q = C^2 - \sqrt{\lambda}^2 I_q = (C + \sqrt{\lambda} I_q)(C - \sqrt{\lambda} I_q)$, comme $-\sqrt{\lambda} \notin \mathrm{Sp}(C)$ (car strictement négatif et C positive), on a $C + \sqrt{\lambda} I_q$ inversible. Soit $x \in \ker(M - \lambda I_q)$, ainsi $(M - \lambda I_q)x = 0$, ce qui implique $(C + \sqrt{\lambda} I_q)(C - \sqrt{\lambda} I_q)x = 0$, en multipliant à gauche par $(C + \sqrt{\lambda} I_q)^{-1}$ on en déduit que $(C - \sqrt{\lambda} I_q)x = 0$, et ainsi $x \in \ker(C - \sqrt{\lambda} I_q)$, ce qui montre $\ker(C - \sqrt{\lambda} I_q) \subset \ker(M - \lambda I_q)$.

— Si $\lambda = 0$, comme C est symétrique réelle, elle est diagonalisable, ainsi C est semblable à une matrice Δ', comme Δ' est diagonale son rang est le nombre de coefficient non nul sur sa diagonale, ainsi $\mathrm{rg}(\Delta') = \mathrm{rg}(\Delta'^2)$, or C et Δ' sont semblable donc elles ont le même rang, mais on a aussi que $C^2 = M$ et Δ'^2 sont semblables, ainsi $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(M)$, ce qui montre avec le théorème du rang que le noyau C et le noyau de $M = C^2$ ont la même dimension comme on a une inclusion on en déduit que $\ker(C) = \ker(M)$.

Comme B à les mêmes propriétés que C, on a donc pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, que $\ker(C - \sqrt{\lambda} I_q) = \ker(M - \lambda I_q) = \ker(C - \sqrt{\lambda} I_q)$. Ainsi pour tout $x \in \ker(M - \lambda I_q)$, on a $Cx = \sqrt{\lambda} x = Bx$, il suffit juste de noter (M diagonalisable) que $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \ker(M - \lambda I_q)$ pour conclure que $Cx = Bx$ pour tout x et donc que $B = C$.

II.C- Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle.

Correction :

Q18. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que M_n est bien définie et que $M_n = P\mathrm{Diag}(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q))P^\top$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $M_0 = I_q$ et $P\mathrm{Diag}(c_0(\lambda_1), \ldots, c_0(\lambda_q))P^\top = P\mathrm{Diag}(1, \ldots 1)P^\top = PI_qP^\top = PP^\top = I_q$, ce qui initialise la propriété.

Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $M_n = P\mathrm{Diag}(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q))P^\top$. On a montré en **Q7** que, pour tout i, $c_n(\lambda_i) > 0$, ainsi $\det(M_n) = \prod_{k=1}^{q} c_n(\lambda_k) > 0$, ainsi M_n est inversible, ce qui montre que M_{n+1} est bien définie, de plus on a $M_n^{-1} = P\mathrm{Diag}((c_n(\lambda_1))^{-1}, \ldots, (c_n(\lambda_q))^{-1})P^\top$.

Comme $MM_n = P\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)P^\top P\mathrm{Diag}((c_n(\lambda_1))^{-1}, \ldots, (c_n(\lambda_q))^{-1})P^\top = P\mathrm{Diag}((\lambda_1 c_n(\lambda_1))^{-1}, \ldots, \lambda_q(c_n(\lambda_q))^{-1})P^\top$, on a alors $M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(P\mathrm{Diag}(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \ldots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q}P^\top\right) = P\mathrm{Diag}(c_{n+1}(\lambda_1), \ldots, c_{n+1}(\lambda_q))P^\top$. Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

Q19. Pour tout i, $(c_n(\lambda_i))$ converge vers $\sqrt{\lambda_i}$. Par continuité du produit matricielle $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = P\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_q})P^\top = \sqrt{M}$.

III Méthode de Newton numérique.

III.A- Convergence de la méthode de Newton.

Correction :

Q20. Avec ces hypothèses f possède au plus un point d'annulation, en effet s'il en possède plus alors il existe $(a,b)\in I^2$ avec $a<b$ tels que $f(a)=f(b)=0$, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, f est en particulier continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, ainsi le théorème de Rolle donne l'existence d'un $\alpha\in]a,b[\subset I$ tel que $f'(\alpha)=0$, cependant f' ne s'annule pas sur I.

Q21. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I alors f'' est continue sur I donc aussi sur le segment J_r, ainsi elle y est bornée (et atteint ses bornes), ce qui donne l'existence de s_r (et que c'est un maximum), de même on a aussi f' continue sur le segment J_r, alors f' est bornée et atteint ses bornes, ainsi i_r existe et il existe $\alpha\in J_r$ tel que $i_r=|f'(\alpha)|>0$ (puisque f' ne s'annule pas sur I).

Q22. On fixe un premier $r'>0$ tel que $J_r\subset I$ (il existe car I est un ouvert et $c\in I$), pour $r\in]0,r'[$ on a $J_r\subset J'_r$ ainsi $s_r\le s_{r'}$ et $i_r\ge i_{r'}$, ce qui implique que $0\le K_r\le K_{r'}$ et donc $0\le rK_r\le rK_{r'}$, comme $\lim\limits_{r\to0} rK_{r'}=0$ il existe un $r<r'$ tel que $rK_{r'}<1$, et donc tel que $0\le rK_r<1$.

Q23. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J_r et que $|f''|\le s_r$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne donc $|f(c)-f(c_n)-f'(c_n)(c-c_n|\le \frac{s_n}{2!}|c-c_n|^2$. Comme $f(c)=0$ et $|f(c_n)|>0$, on a $\left|\frac{-f(c_n)}{f'(c_n)}-(c-c_n)\right|\le \frac{s_r}{2|f'(c_n)|}|c-c_n|^2$. Comme $c_{n+1}=c_n-\frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$ et $\frac{1}{|f'(c_n)|}\le\frac{1}{i_r}$, on en déduit que $|c_{n+1}-c|\le K_r|c_n-c|^2$, or $c_n\in J_r$, ainsi $|c_n-c|\le r$, ainsi $|c_{n+1}-c|\le r^2K_r\le r$ (puisque $rKr<1$), ainsi $c_{n+1}\in J_r$.

Q24. Procédons par récurrence sur n.

Initialisation : Pour $n=0$ l'inégalité demandée n'est rien d'autre que $|c_0-c|\le|c_0-c|$, la propriété est donc initialisée.

Hérédité : On suppose $|c_n-c|\le\frac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}$.

D'après la question précédente : $|c_{n+1}-c|\le K_r|c_n-c|^2 \underset{\text{(HR)}}{\le} K_r\frac{\left((K_r|c_0-c|)^{2^n}\right)^2}{K_r^2}=\frac{(K_r|c_0-c|)^{2^{n+1}}}{K_r}$, ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

Comme $c_0\in J_r$, on a $|c_0-c|\le r$, ainsi $K_r|c_0-c|\le rK_r<1$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(K_r|c_0-c|)^{2^{n+1}}=0$, ainsi par encadrement $\lim\limits_{c_n}=c$.

III.B- Une implémentation en Python.

Correction :

Q25. On notera qu'une fonction qui se termine sans rien retourner va en fait retourner `None`.

```
def newton(c0,f,df):
    cn=c0
    for n in range(51):
        if abs(f(cn))<10**(-10):
            return cn
        cn = cn-(f(cn)/df(cn))
```

IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée.

IV.A- Une méthode de Newton matricielle

Correction :

Q26. Soit μ une racine de P', comme P n'a que des racines simples, μ n'est pas racine de P, les racines de P sont exactement les valeurs propres de M, ainsi μ n'est pas une valeur propre de M, on a donc $\ker(M-\mu I_q)=\{0\}$, ainsi $M-\mu I_q$ est inversible.

On factorise $P' = s\displaystyle\prod_{i=1}^{s-1}(X-\mu_i)$ (comme P est unitaire de degré $s \geq 1$, le coefficient dominant de P' vaut s), ainsi $P'(M) = \alpha\displaystyle\prod_{i=1}^{s-1}(M-\mu_i I_q)$, et donc $P'(M)$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Q27. Comme $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ sont les valeurs propres de M, on a $\chi_M = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_i}$ où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i, comme χ_M est scindé on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_i = q$ ainsi pour tout i, $m_i \leq q$. On a $P^q = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^q = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_i}\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{q-m_i} = \chi_M(X)\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{q-m_i}$. Ainsi $\chi_M | P^q$.
Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_M est un polynôme annulateur de M, ainsi P^q l'est aussi, ie $P^q(M)=0$, comme $P^q(M) = P(M)^q$, on en déduit donc que $P(M)$ est une matrice nilpotente.

Q28. On a admis l'existence de $B_n \in \mathbb{C}[M]$ tel que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$, or pour n tel que $2^n \geq q$ (ie pour n tel que $n \geq n_0 = \lfloor \frac{\ln(q)}{\ln(2)} \rfloor + 1$) on a $(P(M))^{2^n} = 0$ et donc $P(M_n) = 0$ et donc $M_{n+1} = M_n$, ce qui montre bien que (M_n) est stationnaire.

Q29. Procédons par récurrence sur n.
Initialisation : Pour $n=0$ on a $M_0 = M$, ainsi M et M_0 commutent.
Hérédité : On suppose que M_n et M commutent.

On en déduit que pour tout polynôme Q on a que $Q(M_n)$ et M qui commutent (si $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $Q(M_n)M = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k M_n^k M = \sum_{k=0}^{d} a_k M M_n^k = MQ(M_n)$), or on a $M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1}$, on a $P'(M_n)M = MP'(M_n)$ ainsi $MP'(M_n)^{-1} = P'(M_n)^{-1}M$, comme $P(M_n)$ et M_n commutent avec M il en va de même pour M_{n+1}. Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

Q30. D'après la question **Q28**, pour $n \geq n_0$ on a $M_{n+1} = M_n$, ainsi $A = M_n$, mais on a aussi montré que $P(M_n) = 0$, ainsi $P(A) = 0$ comme P un polynôme simplement scindé on a donc que A est diagonalisable.

Q31. On a $A = M_n$ pour $n \geq n_0$, comme M et M_n commutent, on a donc que A et M commutent, ainsi $AN = A(M-A) = AM - A^2 = MA - A^2 = NA$, ainsi N et A commutent.
On a : $N = M - A = M_0 - M_{n_0+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0} M_n - M_{n+1} = \sum_{n=0}^{n_0} P(M_n)P'(M_n)^{-1} = \sum_{n=0}^{n_0} (P(M))^{2^n} B_n P'(M_n)^{-1} = P(M)C$ où on a noté $C = \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0} (P(M))^{2^n-1} B_n P'(M_n)^{-1}$. Comme B_n et $P'(M_n)$ commutent avec M (mêmes arguments qu'en **Q29** on a donc que C et $P(M)$ commutent on a $N^q = P(M)^q C^q = 0$, ainsi N est nilpotente.

IV.B- Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles symétriques.

Correction :

Q32. On a (avec les notations de la première partie) : $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{q-1}(-1)^{n+1}b_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^{q-1})$, ainsi en posant $R_q(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{q-1}(-1)^{n+1}b_n x^n$, on a $\sqrt{1+x} = R_q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{q-1})$. On en déduit donc que $1+x = \sqrt{1+x}^2 = R_q(x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^{q-1})$, ie $1 + x - R_q(x)^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^{q-1})$, dit autrement $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+x-R_q(x)^2}{x^{q-1}} = 0$.
Notons $1 + X - R_q(X)^2 = \sum_{k=0}^{2q} c_k X^k$. Supposons qu'il existe un $k \in [\![0, q-1]\!]$ tel que $c_k \neq 0$ notons $v = \min\{k \in [\![0,2q]\!] \,/\, c_k \neq 0\}$, de sorte que $1 + x - R_q(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} c_v x^v$, ainsi $\frac{1+x-R_q(x)^2}{x^{q-1}} \underset{x\to 0}{\sim} c_v x^{v-q+1}$, comme $v \leq q-1$, ceci contredit le fait que cette quantité converge vers 0, ainsi $c_0 = \ldots = c_{q-1} = 0$, ce qui donne directement que X^q divise $1 + X - R_q(X)$.

Q33. Soit N une matrice nilpotente, on a $N^q = 0$ (en effet il existe k tel que $N^k = 0$, ainsi X^k est annulateur de N, ce qui implique que $\mathrm{Sp}(N) \subset \{0\}$, comme N est nilpotente alors elle n'est pas inversible, en effet si elle l'était $N^k = 0$ le serait, ainsi 0 est valeur propre, comme 0 est l'unique valeur propre alors $\chi_N = X^q$, et comme c'est un polynôme annulateur alors $N^q = 0$.
Comme X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$, et comme X^q est annulateur de N, alors $I_q + N - R_q(N)^2 = 0$, ie $R_q(N)^2 = I_q + N$, ie $R_q(N)$ est une racine carré de $I_q + N$.

Q34. Comme M est trigonalisable, son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ainsi le polynôme P de la partie IV est réel, on a M_0 réel, et si M_n est réel alors $P(M_n)$, $P'(M_n)$ le sont, et on a $P'(M_n)$ inversible dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ (même argument qu'en **Q26**), ainsi M_{n+1} est réelle, ce qui montre par récurrence que toutes les matrices M_n sont réelles, ainsi A l'est aussi (car $A = M_{n_0}$) et donc $N = M - A$ est aussi réelle. Comme on a toujours $P(A) = 0$ et P simplement scindé on a A diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Q35. Comme P est annulateur de A, les valeurs propres de P sont des racines de P, comme les racines de P sont toutes strictement positives (car ce sont les valeurs propres de M). Ainsi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^\star$.

Q36. On sait que A est diagonalisable et qu'il existe $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_q)$ et $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$, comme tous les μ_i sont strictement positifs, on peut poser $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{mu_1}, \dots, \sqrt{mu_q})$ et $A' = P\Delta P^{-1}$. Ainsi $(A')^2 = P\Delta^2 P^{-1} = A$, et donc A' est une racine carré de A.
On pose $A_0 = I_q$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \frac{1}{2}\left(A_n + AA_n^{-1}\right)$, comme en **Q18**, on montre que $A_n = P\mathrm{Diag}(c_n(\mu_1), \dots, c_n(\mu_q))P^{-1}$ et ainsi (A_n) converge vers A'.
Comme 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible, ainsi $M = A + N = A(I_q + A^{-1}N)$, comme A et N commutent, leurs inverses aussi et ainsi $(A^{-1}N)^q = (A^{-1})^q N^q = 0$, ainsi $A^{-1}N$ est nilpotente, ainsi, avec **Q33**, on a que $R_q(A^{-1}N)$ est une racine carré de $I_q + A^{-1}N$.
Montrons maintenant que A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent, comme $R_q(A^{-1}N)$ est un polynôme en $A^{-1}N$ il suffit de montrer que A' et $A^{-1}N$ commutent, tout d'abord on a que $AA' = (A')^3 = A'A$, ainsi $A'A^{-1} = A^{-1}A'$, il reste donc à montrer que $A'N = NA'$. Pour cela on note $(e_1, \dots, e_q)$ une base constituée de vecteurs propres de A' de valeurs propres $(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_q})$ c'est aussi une base constituée de vecteurs propres de A de valeurs propres $(\mu_1, \dots, \mu_q)$, comme $AN = NA$ les sous-espaces propres de A sont stables par n, ainsi Ne_i est dans $E_{\mu_i}(A)$ et donc dans $E_{\sqrt{\mu_i}}(A')$, ainsi $A'Ne_i = \sqrt{\mu_i}Ne_i = NA'e_i$, ainsi AN' et $N'A$ coïncident sur une base donc $A'N = NA'$.
Ceci permet d'avoir que $BR_q(A^{-1}N)$ est une racine carré de M, en effet $(BR_q(A^{-1}N))^2 = B^2 R_q(A^{-1}N)^2 = A(I_q + A^{-1}N) = A + N = M$.