
DNS 9 : pour le mercredi 25 mars**

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

X-E.N.S-E.S.P.C.I. 2024

Notations

— Dans toute la suite, d désignera un entier strictement positif. On désignera par $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des matrices carrées de taille $d \times d$ à coefficients dans \mathbb{R} . Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on notera

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$$

où $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^d M_{ii}$ est la trace de la matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et A^\top sa transposée. Selon la convention habituelle, M_{ij} désigne le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de la matrice M pour tout $1 \leq i, j \leq d$.

— Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, on notera $|u|$ sa norme euclidienne canonique. Un tel vecteur sera considéré comme un vecteur colonne et u^\top sera le vecteur ligne associé. On notera $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top v$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^d lorsque u et v sont dans \mathbb{R}^d . En particulier on aura $|u|^2 = \langle u, u \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top u$.

— On notera I_d la matrice identité de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On désignera par

$$O_d(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid M^\top M = I_d\}$$

le groupe orthogonal sur \mathbb{R}^d et par

$$SO_d(\mathbb{R}) = \{M \in O_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

le groupe spécial orthogonal, où $\det(M)$ désigne le déterminant de $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On notera

$$\text{Dep}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times SO_d(\mathbb{R})$$

— Pour toute famille $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$ de vecteurs de \mathbb{R}^d , on notera $A = (a_1 \mid \dots \mid a_d)$ la matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dont la i -ème colonne de A est formée des coordonnées du vecteur a_i .

— Pour toute famille de réels $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$, on notera $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$.

1 – Préliminaires

(1) Soit $R \in O_d(\mathbb{R})$. Vérifier que $\det(R) \in \{-1, +1\}$.

(2) Vérifier que $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme associée.

(3)

(a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on a $\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A \rangle$.

(b) Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

(c) En déduire que pour tous A, B et C dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^\top A, C \rangle = \langle AC^\top, B \rangle$$

(4) Soit $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ une matrice diagonale à coefficients positifs et soit $R \in O_d(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $|R_{ii}| \leq 1$ où R_{ii} est le i -ème coefficient diagonal de R .

(b) En déduire que $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)$.

Correction :

- (1) On a $R^T R = I_d$, de plus $\det(R^T R) = \det(R^T) \det(R) = \det(R)^2$, et $\det(I_d) = 1$ ainsi $\det(R)^2 = 1$, ie $\det(R) \in \{-1, +1\}$.
- (2) Tout d'abord $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien une application de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , de plus elle est :
- Symétrique : Pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^2$, $\langle B, A \rangle = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}((B^T A)^T) = \text{tr}(A^T B) = \langle A, B \rangle$.
 - Bilinéaire : Pour $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle A + \lambda B | C \rangle = \text{tr}(C^T (A + \lambda B)) = \text{tr}(C^T A) = \lambda \text{tr}(C^T B) = \langle A, C \rangle + \lambda \langle B, C \rangle$, la symétrie donne la linéarité en la deuxième variable.
 - Défini positif, pour $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^d (A^T A)_{i,i} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j}^T A_{j,i} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j}^2 \geq 0$, d'où la positivité, et si $\langle A, A \rangle = 0$, comme on a une somme de termes positifs, alors pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on a $A_{i,j}^2 = 0$, ie $A = 0$.
- Ceci montre bien que $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

(3)

- (a) Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^d)^2$, on a d'une part $\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^T Av = \sum_{i=1}^d u_i (Av)_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d u_i A_{i,j} v_j$ et d'autre part

$$\langle uv^T | A \rangle = \text{tr}(A^T uv^T) = \sum_{i=1}^d (A^T uv^T)_{i,i} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j}^T (uv^T)_{j,i} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{j,i} u_j v_i. \text{ Ce qui montre bien}$$

$$\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^T, A \rangle.$$

- (b) Pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^2$, on a $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^d (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j} B_{j,i} = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d B_{j,i} A_{i,j} = \sum_{j=1}^d (BA)_{j,j} = \text{tr}(BA)$.

- (c) Soit $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^3$, on a $\langle A, BC \rangle = \text{tr}((BC)^T A) = \text{tr}(C^T B^T A) = \langle B^T A, C \rangle$. On a aussi $\langle A, BC \rangle = \langle BC, A \rangle = \text{tr}(A^T BC) = \text{tr}(CA^T B) = \langle (CA^T)^T, B \rangle = \langle AC^T, B \rangle$.

- (4) (a) Pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on a $R_{i,i}^2 \leq \sum_{j=1}^d R_{i,j}^2 = 1$ (les colonnes de R forment une base orthonormée), ainsi $|R_{i,i}| \leq 1$.
- (b) En utilisant D diagonale, la question précédente et la positivité des α_i , on a : $\langle D, R \rangle = \langle R, D \rangle = \text{tr}(D^T R) = \sum_{i=1}^d (D^T R)_{i,i} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d D_{i,j}^T R_{j,i} = \sum_{i=1}^d \alpha_i R_{i,i} \leq \sum_{i=1}^d |\alpha_i| |R_{i,i}| \leq \sum_{i=1}^d |\alpha_i| = \sum_{i=1}^d \alpha_i = \text{tr}(D)$.

2 – Ensemble des déplacements de \mathbb{R}^d

Pour tout $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on note $\phi_g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'application définie par

$$\phi_g(x) = Rx + \tau$$

On remarquera que lorsque $\tau = 0$, ϕ_g est une rotation vectorielle de l'espace \mathbb{R}^d , et lorsque $R = I_d$, ϕ_g est une translation. Dans le cas général, on dira que ϕ_g est un déplacement de l'espace \mathbb{R}^d .

- (5)
- (a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a - b|$.
 - (b) Montrer pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $\phi_g = \phi_{g'}$ si et seulement si $g = g'$.
 - (c) Montrer qu'il existe un unique $e \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que ϕ_e soit l'application identité sur \mathbb{R}^d c'est-à-dire que $\phi_e(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
- (6)
- (a) Vérifier que pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique $g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$. On notera $g'g$ cet élément dans la suite.
 - (b) Vérifier que pour tous g_1, g_2 et g_3 dans $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ on a $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$.
- (7) Soit $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.
- (a) Montrer que ϕ_g est bijective. On note ϕ_g^{-1} son application réciproque.
 - (b) Montrer qu'il existe un unique $g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, que l'on explicitera en fonction de g , tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$. On notera $g' = g^{-1}$.
 - (c) Vérifier que $ge = eg = g$ puis que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.
- (8) Pour quelles valeurs de d a-t-on $gg' = g'g$ pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$?

Correction :

(5)

- (a) Pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^d)^2$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |R(a - b)| = |a - b|$ puisqu'un endomorphisme orthogonal conserve la norme (en effet pour $x \in \mathbb{R}^d$, $|Rx|^2 = Rx^\top Rx = x^\top R^\top Rx = x^\top I_d x = x^\top x = |x|^2$).
- (b) Soit $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$. Tout d'abord le sens $g = g'$ implique $\phi_g = \phi_{g'}$, est immédiat, supposons $\phi_g = \phi_{g'}$, notons $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$, on a en particulier $\tau = \phi_g(0) = \phi_{g'}(0) = \tau'$, ensuite pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $Rx + \tau = \phi_g(x) = \phi_{g'}(x) = R'x + \tau'$, ainsi $Rx = R'x$, ceci étant vrai pour tout x , on a donc $R = R'$ d'où $g = g'$.
- (c) On remarque que pour $e = (I_d, 0)$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi_e(x) = I_d x + 0 = x$, ce qui donne l'existence, l'unicité est une conséquence immédiate de la question précédente.

(6)

- (a) Soit $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$, notons $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\phi_{g'} \circ \phi_g(x) = \phi_{g'}(Rx + \tau) = R'(Rx + \tau) + \tau' = R'Rx + R'\tau + \tau'$, ainsi en posant $R'' = R'R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ et $\tau'' = R'\tau + \tau' \in \mathbb{R}^d$, on a $g'' = (\tau'', R'') \in \text{Deo}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$, ce qui donne l'existence, l'unicité découle là encore de (5)(b).
- (b) Soit $(g_1, g_2, g_3) \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^3$. En utilisant que \circ est associatif on a $\phi_{g_1(g_2g_3)} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2g_3} = \phi_{g_1} \circ (\phi_{g_2} \circ \phi_{g_3}) = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2} \circ \phi_{g_3}$ et $\phi_{(g_1g_2)g_3} = \phi_{g_1g_2} \circ \phi_{g_3} = (\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}) \circ \phi_{g_3} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2} \circ \phi_{g_3}$, ainsi $\phi_{g_1(g_2g_3)} = \phi_{(g_1g_2)g_3}$ et par l'unicité de (5)(b), on a $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$.
- (7) (a) Notons $g = (\tau, R)$, comme R est orthogonal on a $R^\top R = I_d$ (ie R inversible d'inverse a transposée). Soit $y \in \mathbb{R}^d$, on a : $\phi_g(x) = y \iff Rx + \tau = y \iff Rx = y - \tau \iff x = R^\top y - R^\top \tau$, ce qui montre non seulement que ϕ_g est bijective mais aussi qu'en posant $g' = (R^\top, -R^\top \tau)$, on a $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g'}$.
- (b) On a montré l'existence à la question précédente, l'unicité découle encore de (5)(b).
- (c) On a $\phi_{ge} = \phi_g \circ \phi_e = \phi_g$ et de même $\phi_{eg} = \phi_g$, ainsi, d'après (5)(b), on a $ge = eg = g$.
On a $\phi_{gg^{-1}} = \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_g \circ (\phi_g)^{-1} = \text{Id} = \phi_e$, de même $\phi_{g^{-1}g} = \phi_e$, ainsi toujours d'après (5)(b) on a $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.
- (8) Tout d'abord remarquons que $gg' = g'g$ pour tout g et g' dans $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ est équivalent à $R'R = RR'$ et $R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau$ pour tout R et R' dans $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ et pour tout τ et τ' dans \mathbb{R}^d .
Si on a $gg' = g'g$ pour tout g et g' alors pour $\tau = \tau'$ on a pour tout R et R' que $R'\tau = R\tau$ et donc que $R' = R$, ce qui implique que $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ ne possède qu'un élément, ce qui n'est le cas que pour $d = 1$.
Réciproquement si $d = 1$ on a bien $gg' = g'g$ pour tous $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$.

3 – Distance à déplacement près

On considère n un entier strictement positif et

$$\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \mid z_i \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq n \right\}$$

l'espace vectoriel des familles de n points dans \mathbb{R}^d muni de la norme $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$. Pour tous $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ on note

$$g \cdot \mathbf{z} = (\phi_g(z_i))_{1 \leq i \leq n} \quad (1)$$

(9)

- (a) Montrer que pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on a $g \cdot (g' \cdot \mathbf{z}) = (gg') \cdot \mathbf{z}$.
- (b) Montrer que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, si $\mathbf{x} = g \cdot \mathbf{y}$ alors $\mathbf{y} = g^{-1} \cdot \mathbf{x}$.

Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf \{ \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \}$$

(10)

- (a) Montrer que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|g \cdot \mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

- (b) En déduire que $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- (c) Montrer que pour tous $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$ et $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$, on a

$$\|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|g' \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

- (d) En déduire que $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.
- (11) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note $c(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) \mid \exists g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d), g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.
- (a) Montrer que si $c(\mathbf{x}) \cap c(\mathbf{y}) \neq \emptyset$ alors $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$.
- (b) Montrer que si $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$ alors $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Correction :

(9)

- (a) Soit $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$ et $z \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on a $g \cdot (g' \cdot z) = g \cdot ((\phi_{g'}(z_i))_{1 \leq i \leq n}) = (\phi_g(\phi_{g'}(z_i)))_{1 \leq i \leq n}$, or d'après (6)(a), $\phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{gg'}$, ainsi $g \cdot (g' \cdot z) = (\phi_{gg'}(z_i))_{1 \leq i \leq n} = (gg') \cdot z$.
- (b) Soit $(x, y) \in (\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}))^2$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on suppose $x = g \cdot y$, ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x_i = \varphi_g(y_i)$ et donc $y_i = \varphi_{g^{-1}}(x_i)$, ce qui montre que $y = g^{-1} \cdot x$.
Alternative : écrire $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = e \cdot y = y$ puisque $\phi_e = \text{id}$.

(10)

- (a) Soit $(x, y) \in (\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}))^2$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. On a $\|g \cdot y - g \cdot x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2 = \|y - x\|^2$.
- (b) Soit $(x, y) \in (\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}))^2$. Pour $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $\|y - g \cdot x\| = \|g^{-1} \cdot y - g^{-1} \cdot g \cdot x\| = \|x - g^{-1} \cdot y\| \geq \delta(y, x)$, ceci étant vrai pour tout g , en prenant l'inf sur g on a $\delta(x, y) \leq \delta(y, x)$, en inversant les rôles de x et de y on obtient l'autre inégalité, ainsi $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.
- (c) Soit $(x, y, z) \in (\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}))^3$ et soit $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$. On a (inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$) : $\|z - g \cdot x\| = \|z - (gg') \cdot y + (gg') \cdot y - g \cdot x\| \leq \|z - (gg') \cdot y\| + \|g \cdot (g' \cdot y) - g \cdot x\| = \|z - (gg') \cdot y\| + \|g' \cdot y - x\|$.
- (d) Soit $(x, y, z) \in (\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}))^3$, pour tout $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$, on a $\delta(z, x) \leq \|z - g \cdot x\| \leq \|z - (gg') \cdot y\| + \|g' \cdot y - x\|$. Pour tout $(h, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$, on a $\delta(z, x) \leq \|z - h \cdot y\| + \|g' \cdot y - x\|$. (on applique l'inégalité précédente à $g = h(g')^{-1}$ et g). On prend l'inf par rapport à h à g' fixé, ainsi pour tout $g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $\delta(z, x) \leq \delta(z, y) + \|g' \cdot y - x\|$, il ne reste plus qu'à prendre la borne inf sur h pour avoir $\delta(z, x) \leq \delta(z, y) + \delta(y, x)$, qui est bien l'inégalité demandée.

(11)

- (a) On suppose $c(x) \cap c(y) \neq \emptyset$, il existe donc $z \in c(x) \cap c(y)$. Il existe donc $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $g \cdot x = z$ et il existe $g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $g' \cdot y = z$. Ainsi $x = g^{-1} \cdot z = g^{-1} \cdot g' \cdot y$. Soit $t \in c(x)$, il existe $h \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $h \cdot x = t$, posons $h' = h \cdot g^{-1} \cdot g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, ainsi $h' \cdot y = t$ et donc $t \in c(y)$, ce qui montre $c(x) \subset c(y)$, on obtient l'autre inclusion en inversant les rôles de x et y , ainsi $c(x) = c(y)$.
- (b) On suppose $c(x) = c(y)$, comme $y = e \cdot y$, on a $y \in c(y) = c(x)$, il existe donc $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $y = g \cdot x$, ainsi $\|y - g \cdot x\| = 0$, or $0 \leq \delta(x, y) \leq \|y - g \cdot x\| = 0$, ainsi $\delta(x, y) = 0$.

4 – Un problème d'optimisation

On fixe dans cette partie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et on introduit pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - (R\mathbf{x}_i + \tau)|^2 = \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\|^2$$

où $g = (\tau, R)$.

- (12) On note $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ et $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i$.

(a) Montrer que $J(\tau, R) = \left(\sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2 \right) + n|\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2$.

- (b) En déduire que pour tout $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, l'application $\tau \mapsto J(\tau, R)$ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} a un unique minimum, noté $\tau(R)$, que l'on explicitera.

- (13) On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de la topologie associée à la norme $\|M\| = \sqrt{\langle M, M \rangle}$.

- (a) Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^T M$ est continue.
- (b) Montrer que $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

(14)

- (a) Montrer qu'il existe $R_* \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que $J(\tau(R_*), R_*) \leq J(\tau, R)$ pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

(b) Montrer que R_* n'est pas forcément unique.

(15) Montrer que si $V_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}|^2$ et $V_n(\mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}|^2$ alors

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = nV_n(\mathbf{x}) + nV_n(\mathbf{y}) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}), R \rangle$$

où $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une matrice que l'on précisera.

Correction :

(12)

(a) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $|y_i - (Rx_i + \tau)|^2 = |y_i - \bar{y} - (R(x_i - \bar{x})) + \bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 = |y_i - \bar{y} - (R(x_i - \bar{x}))|^2 + |\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 + 2\langle y_i - \bar{y} - (R(x_i - \bar{x})), \bar{y} - R\bar{x} - \tau \rangle$. Ainsi $\sum_{i=1}^n |y_i - (Rx_i + \tau)|^2 = \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - (R(x_i - \bar{x}))|^2 + n|\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 + 2\sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y} - (R(x_i - \bar{x})), \bar{y} - R\bar{x} - \tau \rangle$.

Or $\sum_{i=1}^n 2\langle y_i - \bar{y} - (R(x_i - \bar{x})), \bar{y} - R\bar{x} - \tau \rangle = 2\langle \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})R, \bar{y} - R\bar{x} - \tau \rangle$, il suffit alors de remarquer que $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ pour conclure que $J(\tau, R) = \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - (R(x_i - \bar{x}))|^2 + n|\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2$.

(b) Soit $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, la question précédente donne, pour tout τ , $J(\tau, R) \geq \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - (R(x_i - \bar{x}))|^2$ avec égalité si et seulement si $n|\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 = 0$, ie $\tau = \bar{y} - R\bar{x}$. Ce qui montre que $\tau \mapsto J(\tau, R)$ admet un unique minimum atteint en $\tau(R) = \bar{y} - R\bar{x}$.

(13)

(a) Les coefficients de $M^\top M$ sont polynômiales en les coefficient de M , ainsi f est continue.

(b) Comme $\{I_d\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et comme f est continue, on a que $\mathring{O}_d(\mathbb{R})$, qui est l'image réciproque de $\{I_d\}$ par f qui est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, pour la même raison (image réciproque de $\{1\}$ par l'application \det qui est continue) l'ensemble des matrices de déterminant 1 est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, ainsi $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. De plus pour $M \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, on a $\|M\|^2 = \text{tr}(M^\top M) = \text{tr}(I_d) = d$, ainsi $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est borné.

Ce qui montre que $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

(14)

(a) L'application $R \mapsto J(\tau(R), R)$ est continue sur $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ qui est un fermé borné, donc elle est bornée et atteint ses bornes donc il existe R_* tel que pour tout $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, $J(\tau(R_*), R_*) \leq J(\tau(R), R)$, il ne reste plus qu'à utiliser 12(b) pour conclure, pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ que $J(\tau(R_*), R_*) \leq J(\tau, R)$.

(b) Dans le cas ou pour tout k , $x_k = y_k = 0$ on a $J(\tau(R), R) = 0$ pour tout R , ce qui montre la non unicité de R_* dans ce cas.

(15) On a $\delta(x, y)^2 = \inf_{g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)} \|y - g \cdot x\|^2 = \inf_{(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)} J(\tau, R)$. Ainsi, d'après la question 14(a), $\delta(x, y)^2 =$

$$\inf_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R) = \inf_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2.$$

Or si $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, on a $\sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 = \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}|^2 + |R(x_i - \bar{x})|^2 - 2\langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle =$

$$\sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}|^2 + \sum_{i=1}^n |R(x_i - \bar{x})|^2 - 2\sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle.$$

Comme R est une isométrie, pour tout i , on a $|R(x_i - \bar{x})|^2 = |x_i - \bar{x}|^2$. Ainsi $\sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}|^2 = nV_n(y)$

et $\sum_{i=1}^n |R(x_i - \bar{x})|^2 = nV_n(x)$. Enfin (en utilisant 3(a)) : $\sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top |R \rangle = \langle \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top |R \rangle$, il ne reste plus qu'à poser $Z(x, y) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top$ pour avoir

$$\sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2\langle Z(x, y), R \rangle.$$

$$\text{Ce qui permet d'obtenir } \delta(x, y)^2 = \inf_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y) | R \rangle.$$

5 – Calcul de $\delta(x, y)$ dans le cas où $\det(Z(x, y)) > 0$

Soit $Z \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $S = Z^\top Z$.

- (16) Montrer qu'il existe une famille décroissante $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ de réels strictement positifs et une base orthonormée (u_1, \dots, u_d) de \mathbb{R}^d telle que $Su_i = \lambda_i u_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

On appellera valeurs singulières de Z la famille $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$.

- (17) On considère $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

(a) Montrer que (v_1, \dots, v_d) est une base orthonormée de \mathbb{R}^d .

(b) Vérifier que si $U = (u_1 | \dots | u_d)$, $V = (v_1 | \dots | v_d)$ et $D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$ alors $Z = VDU^\top$.

- (18) Mettre sous la forme précédente $Z = VDU^\top$, en spécifiant vos choix de U, V et D , les matrices $Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{et } Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (19) On considère que $\det(Z) > 0$.

(a) Montrer que si $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ alors $V^\top R U \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle$$

- (20) Donner la valeur de $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en fonction de $V_n(\mathbf{x}), V_n(\mathbf{y})$ et des valeurs singulières de $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dans le cas où $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) > 0$.

Correction :

- (16) On a $S^\top = Z^\top Z^\top = Z^\top Z = S$, ainsi S est une matrice symétrique réelle, ainsi, d'après le théorème spectral il existe une base orthonormée (u_1, \dots, u_d) de diagonalisation, notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ les valeurs propres associées. Pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on a $u_i^\top S u_i = u_i^\top \lambda_i u_i = \lambda_i |u_i|^2$, mais on a aussi $u_i^\top S u_i = u_i^\top Z^\top Z u_i = |Z u_i|^2$, ainsi $\lambda_i |u_i|^2 = |Z u_i|^2$. Comme $|u_i| > 0$ et $|Z u_i| > 0$ (car Z inversible), on en déduit $\lambda_i > 0$.

- (17)

(a) On a tout de suite que la famille (v_1, \dots, v_d) est une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on a $|v_i|^2 = \frac{1}{\lambda_i} |Z u_i|^2$, or on a vu à la question précédente que $|Z u_i|^2 = \lambda_i |u_i|^2 = \lambda_i$, ainsi $|v_i|^2 = 1$. Ce qui montre bien que (v_1, \dots, v_d) est une base orthonormée de \mathbb{R}^d .

(b) On a $ZU = (Zu_1 | \dots | Zu_d) = (\sqrt{\lambda_1} v_1 | \dots | \sqrt{\lambda_d} v_d) = VD$, comme U est une matrice de passage entre deux BON, U est inversible et $U^{-t} = U^\top$, ainsi $Z = VDU^\top$.

- (18) Pour Z_1 on peut prendre $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Pour } Z_2 \text{ on peut prendre } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (19)

(a) Si $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, comme V^\top et U sont aussi orthogonales, on a $V^\top R U$ orthogonale, or $\det(Z) > 0$ donc (avec 17(b)) $\det(Z) = \det(VDU^\top) = \det(V) \det(D) \det(U)$. Ainsi (avec $\det(R) = 1$) $\det(V^\top R U) = \det(V) \det(U) = \frac{\det(Z)}{\det(D)} > 0$, ainsi $\det(V^\top R U) = 1$ (car le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1), ce qui montre bien que $V^\top R U \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$.

(b) Pour $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$: $\langle Z | R \rangle = \langle VDU^\top | R \rangle$, ainsi d'après 3(a) : $\langle Z | R \rangle = \langle D | V^\top R U \rangle \leq \sup_{R' \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D | R' \rangle$,

$$\text{ainsi par passage au sup } \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle \leq \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle.$$

De même, $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, $\langle D | R \rangle = \langle V^\top Z U | R \rangle = \langle Z | V R U^\top \rangle \leq \sup_{R' \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z | R' \rangle$, ainsi après passage au sup

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle \leq \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle.$$

$$\text{D'où : } \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle.$$

$$(20) \text{ La question précédente (avec 4(b)) donne dans le cas } \det(Z(x, y)) > 0 : \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle = \text{tr}(D) = \langle D | I_d \rangle = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}. \text{ Enfin, avec 15 on a } \delta(x, y)^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}.$$

6 – Le cas où $\det(Z(x, y)) < 0$

On considère $R \in \text{O}_d(\mathbb{R})$.

(21)

- Montrer que si λ est une valeur propre de R alors $\lambda \in \{+1, -1\}$.
- Montrer que $\det(R + I) = \det(R) \det(I + R^\top)$.
- En déduire que si $\det(R) = -1$ alors $\det(R + I) = 0$.

On suppose dorénavant que $\det(R) = -1$.

(22)

- Montrer qu'il existe une base orthonormée (u_1, \dots, u_d) de \mathbb{R}^d telle que l'on a $Ru_d = -u_d$ et $u_d^\top Rx = 0$ pour tout $x \in E_1$ où $E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1})$.
- En déduire que $R(E_1) \subset E_1$ puis que $R(E_1) = E_1$.

On considère une matrice $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_i \geq 0$ décroissants. On note $U = (u_1 | \dots | u_d)$.

(23)

- Vérifier que $\langle D, R \rangle = \langle S, R' \rangle$ où $R' = U^\top RU$ et $S = U^\top DU$
- Montrer que si $R_0 = (R'_{ij})_{1 \leq i, j \leq d-1} \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ alors $R_0 \in \text{O}_{d-1}(\mathbb{R})$.

(24) On pose $S_0 = (S_{ij})_{1 \leq i, j \leq d-1} \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\langle D, R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{dd}$.
- Montrer que $\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(S_0)$.
- Montrer que $\text{tr}(S_0) + S_{dd} = \text{tr}(D)$ et en déduire que $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{dd}$.

(25)

- Montrer que $S_{dd} = \sum_{j=1}^d \alpha_j U_{jd}^2$ où $U = (U_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$.
- En déduire que $\langle D, R \rangle \leq \left(\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i \right) - \alpha_d$.

(26) Donner la valeur de $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en fonction de $V_n(\mathbf{x}), V_n(\mathbf{y})$ et des valeurs singulières de $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dans le cas où $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) < 0$.

Correction :

(21)

- Soit λ une valeur propre réelle de R . Soit x un vecteur propre de R de valeur propre λ , ainsi $x \neq 0$ et $Rx = \lambda x$. Comme R est une isométrie $|Rx| = |x|$, ainsi $|x| = |Rx| = |\lambda x| = |\lambda| |x|$, comme $|x| \neq 0$ on a $|\lambda| = 1$, ainsi $\lambda \in \{\pm 1\}$.
- Comme R est orthogonal, $R^{-1} = R^\top$, ainsi $\det(R + I) = \det(R(I + R^\top)) = \det(R) \det(I + R^\top)$.
- On suppose $\det(R) = -1$, d'après la question précédente on a $\det(R + I) = -\det(I + R^\top)$, ainsi $\det(R + I) = -\det(I + R^\top) = -\det((I + R^\top)^\top) = -\det(I + R)$. Ainsi $\det(R + I) = 0$.

(22)

- Comme $\det(R + I) = 0$, on a -1 valeur propre de R , soit u_d un vecteur propre de R de valeur propre -1 qu'on choisit de norme 1 (quitte à le diviser par sa norme), on pose $E_1 = \text{Vect}(u_d)^\perp$, ainsi E_1 est de dimension $d - 1$ et on choisit une base orthonormée (u_1, \dots, u_d) . On a tout de suite que (u_1, \dots, u_d) est une base orthonormée de \mathbb{R}^d , et on a bien $Ru_d = -u_d$. Soit $x \in E_1$, on a $u_d^\top Rx = (R^\top u_d)^\top x$. Or $Ru_d = -u_d$, ainsi $R^\top Ru_d = -R^\top u_d$, ce qui implique (R orthogonale) que $R^\top u_d = -u_d$. Ainsi $u_d^\top Rx = -u_d^\top x = \langle u_d | x \rangle = 0$.
- Pour $x \in E_1$, $\langle Rx | u_d \rangle = u_d^\top Rx = 0$, ainsi $Rx \in \text{Vect}(u_d)^\perp = E_1$, ce qui montre $R(E_1) \subset E_1$. Comme R est inversible, on a que E_1 et $R(E_1)$ sont la même dimension, comme on a une inclusion, on en déduit que $R(E_1) = E_1$.

(23)

- (a) Les colonnes de U forment une BON de \mathbb{R}^d donc U est orthogonale, ainsi $\langle S|R' \rangle = \langle U^\top DU|U^\top RU \rangle = \langle DU|RU \rangle$ d'après 3(c) et car $UU^\top = I_d$, et pour les mêmes raisons $\langle S|R' \rangle = \langle D|R \rangle$.
- (b) R' n'est rien d'autre que la matrice de $x \mapsto Rx$ dans la base (u_1, \dots, u_d) , elle est donc de la forme (matrice par bloc) $R' = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $R_0 \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ est la matrice de l'induit de $x \mapsto Rx$ sur E_1 qui est bien stable par R . On a $I_d = R'^\top R'$ par calcul matriciel par bloc $R'^\top R' = \begin{pmatrix} R_0^\top R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ainsi $R_0^\top R_0 = I_{d-1}$, ce qui montre bien $R_0 \in O_{d-1}(\mathbb{R})$.

(24)

- (a) On a $\langle D|R \rangle = \langle S|R' \rangle = \text{tr}(S^\top R')$. Or S est symétrique, par calcul par bloc $S^\top R' = SR' = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 R_0 & 0 \\ 0 & -S_{dd} \end{pmatrix}$. Ainsi $\langle D|R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{dd}$.
- (b) Comme S est symétrique réelle donc S_0 l'est encore, ainsi d'après le théorème spectral il existe $P \in O_{d-1}(\mathbb{R})$ et D_0 diagonale telles que $S_0 = PD_0P^\top$. Comme S_0 et D_0 sont semblables, $\text{tr}(D_0) = \text{tr}(S_0)$. Posons $W = P^\top R_0 P$ qui est orthogonale, on a $\text{tr}(S_0 R_0) = \text{tr}(PD_0P^\top R_0) = \text{tr}(D_0P^\top R_0 P) = \langle D_0|W \rangle$, ainsi avec 4(b) $\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(D_0) = \text{tr}(S_0)$.
- (c) On a $\text{tr}(S) = \text{tr}(S_0) + S_{dd}$ (écriture par bloc de S), comme $S = U^\top DU$ avec U orthogonale on a $\text{tr}(S) = \text{tr}(D)$, ainsi $\text{tr}(S_0) + S_{dd} = \text{tr}(D)$, les deux questions précédentes donnent : $\langle D|R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{dd} \leq \text{tr}(S_0) - S_{dd} = \text{tr}(D) - 2S_{dd}$.

(25)

- (a) Comme $S = U^\top DU$, on a $S_{dd} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (U^\top)_{di} D_{ij} U_{jd}$, comme $(U^\top)_{di} = U_{id}$ et D_{ij} vaut 0 si $i \neq j$,

$$S_{dd} = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_{id}^2 \quad (\text{car } \alpha_i = D_{ii}).$$

- (b) Comme α_d est plus grand que tous les autres, $S_{dd} = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_{id}^2 \geq \alpha_d \sum_{i=1}^n U_{id}^2 = \alpha_d$ (car U orthogonale).

$$\text{Ainsi en utilisant 24(c) : } \langle D|R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{dd} \leq \text{tr}(D) - 2\alpha_d = \left(\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i \right) - \alpha_d.$$

- (26) On procède comme dans la partie 5, on note $D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$. D'après la question 15, $\delta(x, y)^2 = nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y)|R \rangle$. D'après 19(b), si $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, on a $Z = VDU^\top$ et $\langle Z|R \rangle = \langle V^\top RU|D \rangle$, comme $\det(Z(x, y)) < 0$, $\det(V) \det(U^\top) < 0$, $R \mapsto V^\top RU$ est une bijection de $\text{SO}_d(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_d(\mathbb{R})$, on en déduit donc que $\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y)|R \rangle = \sup_{R \in O_d(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D|R \rangle$. D'après 25, $\langle D|R \rangle \leq$

$$\left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} \right) - \sqrt{\lambda_d}, \text{ avec égalité pour la matrice } R_0 = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1), \text{ ainsi } \delta(x, y)^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i - \lambda_d \right).$$