DS 1 : samedi 11 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1.

1° Donner la formule du binôme de Newton.

2° Donner, pour $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, la factorisation (en deux facteurs) de a^2-b^2 et de a^3-b^3.

3° (a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $f : x\mapsto \ln(x^2-4)$ et donner f'

(b) Donner la dérivée de tan et de arctan en précisant les domaines de dérivabilité.

(c) Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^\star$. Donner la dérivée de la fonction $g : x\mapsto (u(x))^n$.

(d) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $h : x\mapsto \sqrt{-x^2+x+2}$ et donner h'.

Exercice 2.

4° Énoncer les formules donnant $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. En déduire la formule donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

5° Donner le DL_3 en 0 de $x\mapsto \mathrm{e}^x$, $x\mapsto\ln(1+x)$ et le DL_2 en 0 de $x\mapsto\sqrt{1+x}$.

6° Calculer le développement limité de $x\mapsto\ln(1+\sin(x))$ et de $x\mapsto\ln(1+\cos(x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

7° (a) Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, exprimer $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$ sans symbole de sommation.

En déduire les conditions de convergence et la valeur de la somme de la série $\sum x^n$ puis la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{3^{n+1}}$.

(b) En dérivant P_n montrer que $\sum kx^{k-1}$ converge vers $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ si $x\in]-1,1[$.

Application : calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-1}^{N}(2n-3)\mathrm{e}^{-3n}$.

8° (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Application : si $f:[0,1]\to[0,1]$ est une fonction continue, alors f possède au moins un point fixe sur $[0,1]$, c'est-à-dire : $\exists x_0\in[0,1]\,/\,f(x_0)=x_0$.

(c) On considère $g : x\mapsto\sqrt{1-x^3/2}-x$, écrire un script `Python` fournissant, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée au dix-millième d'un zéro de g sur l'intervalle $[0,1]$.

9° Déterminer une primitive de $f : x\mapsto\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et de $g : x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)}$.

10° Montrer que 1 est racine de $P=X^5-3X^4+2X^3-X^2+3X-2$ et déterminer sa multiplicité.

11° Montrer que l'application $\Delta : P\mapsto XP'-P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Que vaut $\Delta(1)$ et $\Delta(X)$?

12° Soit $E=\mathbb{R}^3$ et $V=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+y+z=0\big\}$.
Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de E. Donner sa dimension.
Soit $W=\{(\alpha,\alpha,\alpha),\ \alpha\in\mathbb{R}\}$. Démontrer que W est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
Démontrer que $E=V\oplus W$.

13° Inverser la matrice $M=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

Exercice 3.

14° Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

15° Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque est $x\mapsto\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$.

16° On note X le résultat du lancer d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité de chacune des face est proportionnelle à son numéro. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

17° Montrer l'inégalité : $\forall x\in\mathbb{R}, |\sin x|\le|x|$.

18° Donner la matrice de $s(x,y)=\left(\frac{-x-2y}{3},\frac{-4x+y}{3}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et dans la base $((1,-2),(1,1))$.