DS 1 : samedi 9 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1.

1° Donner la formule du binôme de Newton.

2° Donner, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, la factorisation (en deux facteurs) de $a^2 - b^2$ et de $a^3 - b^3$.

3° (a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $f : x \mapsto \ln(x^2 - 4)$ et donner f'

(b) Donner la dérivée de tan et de arctan en précisant les domaines de dérivabilité.

(c) Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (u(x))^n$.

(d) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $h : x \mapsto \sqrt{-x^2 + x + 2}$ et donner h'.

Correction :

1° Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2° $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

3° (a) La fonction f est définie sur $D = [-\infty, -2[\cup]2, +\infty]$ et y est dérivable, pour $x \in D$, on a $f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$.

(b) tan est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + tan^2$.
arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

(d) La fonction h est définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $-x^2 + x + 2 \geq 0$, comme ce polynôme de degré 2 s'annule en -1 et en 2, h est définie sur $[-1, 2]$, elle n'est pas définie ailleurs, ainsi $\mathcal{D}_h = [-1, 2]$.
La fonction h est dérivable pour les $x \in \mathcal{D}_h$ tels que $-x^2 + x + 2 > 0$, elle est donc dérivable sur $] - 1, 2[$.
Pour $x \in] - 1, 2[$, on a $h'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x+2}}$

Exercice 2.

4° Énoncer les formules donnant $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. En déduire la formule donnant $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

5° Donner le DL_3 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \ln(1 + x)$ et le DL_2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1 + x}$.

6° Calculer le développement limité de $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ et de $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

7° (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ sans symbole de sommation.

En déduire les conditions de convergence et la valeur de la somme de la série $\sum x^n$ puis la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}}$.

(b) En dérivant P_n montrer que $\sum kx^{k-1}$ converge vers $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$ si $x \in] - 1, 1[$.

Application : calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-1}^{N} (2n - 3)\mathrm{e}^{-3n}$.

8° (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Application : si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction continue, alors f possède au moins un point fixe sur $[0, 1]$, c'est-à-dire : $\exists x_0 \in [0, 1] \,/\, f(x_0) = x_0$.

(c) On considère $g : x \mapsto \sqrt{1 - x^3/2} - x$, écrire un script Python fournissant, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée au dix-millième d'un zéro de g sur l'intervalle $[0, 1]$.

9° Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$.

10° Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ et déterminer sa multiplicité.

11° Montrer que l'application $\Delta : P \mapsto XP' - P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Que vaut $\Delta(1)$ et $\Delta(X)$?

12° Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$.
Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de E. Donner sa dimension.
Soit $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que W est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
Démontrer que $E = V \oplus W$.

13° Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction :

4° On a $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
On en déduit : $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b+\cos a \sin b}{\cos a \cos b-\sin a \sin b} = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a \tan b}$ en divisant numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b$.

5° On a : $e^x = 1 + x + \frac{x2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$,
$\ln(1 + x) = x - \frac{x2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et
$\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(\frac{1}{x^2}) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

6° $\ln(1+\sin(x)) = \ln(1+x-\frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3))$.
$\ln(1 + \cos(x)) = \ln(2 - \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3))) = \ln(2) + \ln(1 - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3))) = \ln(2) - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3))$.

7° (a) $P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $P_n(1) = n + 1$.
Il suit que la série géométrique converge pour $|x| < 1$ et qu'alors sa somme est $\frac{1}{1-x}$.
Application : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ cette série géométrique est de raison $\frac{4}{3} > 1$ donc diverge (grossièrement).

(b) P_n est une fonction polynomiale donc est dérivable et $P_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
Avec 1°, on a aussi $P_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2}$ (si $|x| < 1$) par croissance comparée.
On en déduit donc que la série géométrique dérivée première de raison x, $\sum kx^{k-1}$, converge si et seulement si $|x| < 1$ et que dans ce cas sa somme est $\frac{1}{(1-x)^2}$.
Application : On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(2n - 3)e^{-3n} = 2e^{-3}\sum_{n=0}^{N} n\left(e^{-3}\right)^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{N}\left(e^{-3}\right)^n$ par linéarité de la somme. On reconnaît alors deux séries géométriques de raison $e^{-3} \in]-1, 1[$, donc convergentes, dont une série dérivée première. Grâce aux formules précédente on obtient : $\displaystyle\sum_{n=-1}^{+\infty}(2n-3)e^{-3n} = (-2-3)e^3+\frac{2e^{-3}}{(1 - e^{-3})^2}-\frac{3}{1 - e^{-3}}$.

8° (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, si k est entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

(b) Il s'agit bien évidemment d'appliquer le TVI, reste à trouver la fonction. La voici : $g : x \mapsto f(x) - x$ dont on veut montrer qu'elle s'annule sur $I = [0, 1]$. Cette fonction est bien continue, on a $g(0) = f(0) \geq 0$ (puisque f est à valeurs positives) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 1$ (puisque f est à valeurs dans $[0, 1]$). Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique donc, il existe donc $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$ ie tel que $f(x_0) = x_0$.

(c) On note tout d'abord que g est bien définie et continue sur $[0, 1]$, que $g(0) = 1$ et $g(1) = -1$, ainsi la fonction g possède bien un zéro sur $[0, 1]$. En `Python` on peut rédiger l'algorithme de dichotomie :

```
def g(x):
    return sqrt(1-x**3/2)-x
a,b,eps = 0,1,0.0001
while (b-a)>=2*eps:
    m = (b+a)/2
    if f(m)*f(b)<0:
        a = m
```

```
        else:
            b = m
    print('la limite de u au dix-millieme près est ',m)
```

9° $F : x \mapsto 2\sqrt{x^2+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
$G : x \mapsto \ln|\ln(x)|$ est une primitive de g sur $]0,1[$ (et sur $]1,+\infty[$).

10° Définition : a est racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité m si $(X-a)^m$ divise P mais $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.
Ainsi (c'est juste une reformulation) : a est racine de P de multiplicité m ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$.
Caractérisation : a est racine de P de multiplicité m ssi $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

On a $P(1) = 0$, on a $P' = 5X^4 - 12X^3 + 6X^2 - 2X + 3$, ainsi $P'(1) = 0$, on a $P'' = 20X^3 - 36X^2 + 12X - 2$, ainsi $P''(1) = -6 \neq 0$. Donc 1 est racine double de P.
Alternative : On remarque que $P(1) = 0$, on a on fait la division euclidienne de P par $X-1$ et on trouve $P = (X-1)Q_1$ avec $Q_1 = X^4 - 2X^3 - X + 2$, comme $Q_1(1) = 0$ on fait la division euclidienne de Q_1 par $X-1$ et on trouve $Q_1 = (X-1)Q_2$ avec $Q_2 = X^3 - X^2 - X - 2$, comme $Q_2(1) = -3 \neq 0$, on en déduit que $P = (X-1)^2 Q_2$ avec $Q_2(1) \neq 0$ ainsi 1 est racine double de P.

11° Tout d'abord Δ est bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\Delta(P+\lambda Q) = X(P+\lambda Q)' - (P+\lambda Q) = XP' - P + \lambda(XQ' - Q) = \Delta(P) + \lambda\Delta(Q)$, ce qui montre bien que Δ est linéaire.
On a $\Delta(1) = X.0 - 1 = -1$ et $\Delta(X) = X.1 - X = 0$.

12° Quand un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est donné par un système d'équations il est facile d'en déduire son écriture comme un Vect.
$(x,y,z) \in V \Leftrightarrow z = -x-y$ donc $V = \{(x,y,-x-y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$ donc V est un sev de $E = \mathbb{R}^3$.
La famille génératrice précédente est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc est libre par suite c'est une base de V et donc $\dim V = 2$. Directement $W = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ donc W est un sev de dimension 1 de E.
Il y a plusieurs voies pour montrer $E = F \oplus G$:

- montrer que tout (x,y,z) s'écrit de façon con unique comme somme de $v + w$ où $v \in V$ et $w \in W$.
- montrer que $V + W$ est de dimension 3 ie. ici que $V \cap W = \{0\}$ (le plus facile ?)
- ou encore de montrer que la concaténation de bases de V et W est une base de E. Pour cela on peut calculer le déterminant de la matrice 3×3 correspondante et montrer qu'il est non nul, ou bien montrer que $(1,1,1)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$. Par exemple $(1,1,1) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) \Rightarrow \alpha = \beta = 1$ absurde. Ou encore plus rapide $(1,1,1)$ n'est pas dans le plan V (évidente puisque $1+1+1 = 3 \neq 0$).

13° Plusieurs possibilités ici vu la forme de la matrice.

(a) On applique l'algorithme de Gauss-Jordan dont on ne donne que les étapes (possibles) : $L_2 \leftarrow L_2 - L_3; L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1; L_3 \leftarrow \frac{L_3 - L_2}{4}$ à ce stade la matrice est triangulaire supérieure sans coefficient diagonal nul donc est inversible de même que A. On poursuit par $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et on finit avec $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2 - L_3)$.

(b) On écrit $M = J + I$ où J est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1.
Alors $M^2 = (J+I)^2 = J^2 + 2J + I$ car I commute avec J.
Or $J^2 = 3J$ donc $M^2 = 5J + I = 5M - 4I$ donc $M(M - 5I) = -4I$ d'où $M\left[\frac{1}{4}(5I - M)\right] = I$. Dont il suit que M est inversible d'inverse $\frac{1}{4}(5I - M)$.

dans les deux cas on a trouvé $M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3.

14° Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

15° Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque est $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

16° On note X le résultat du lancer d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité de chacune des face est proportionnelle à son numéro. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

17° Montrer l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

18° Donner la matrice de $s(x,y) = \left(\frac{-x-2y}{3}, \frac{-4x+y}{3}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et dans la base $((1,-2),(1,1))$.

Correction :

14° À partir de la formule de Moivre, des formules d'Euler et du binôme ; un classique :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5\right]\\ &= \mathrm{Re}\left[\cos^5(\theta) + 5\mathrm{i}\cos^4(\theta)\sin(\theta) + 10\mathrm{i}^2\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 10\mathrm{i}^3\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\mathrm{i}^4\cos(\theta)\sin^4(\theta) + \mathrm{i}^5\sin^5(\theta)\right]\\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\end{aligned}$$

Remplacer alors $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$, développer, simplifier. Pour ainsi obtenir : $\cos(5\theta) = P_5(\cos(\theta))$ où $P_5(X) = X^5 - 10X^3(1-X^2) + 5X(1-X^2)^2 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$.

15° On peut faire les deux choses en une en montrant que $\mathrm{sh}\circ f = f\circ \mathrm{sh} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ en notant f la fonction proposée dans l'énoncé. Bien sûr le théorème de la bijection monotone assure que sh soit bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Mais cette méthode présente l'inconvénient de devoir connaître à priori l'expression de la bijection réciproque.

Autre possibilité : résoudre $\mathrm{sh}\,x = y$ où y est un réel fixé et x est une inconnue réel. Optons ici pour cette dernière :

$$y = \mathrm{sh}\,x \Leftrightarrow 2y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 2y = \mathrm{e}^x - 1/\mathrm{e}^x \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0.$$

Ce trinôme du 2nd degré en e^x a pour discriminant $\Delta = 4(y^2+1) > 0$ donc $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$ l'autre racine est écartée car $\mathrm{e}^x > 0$. Le résultat est atteint en passant au logarithme : $\mathrm{sh}^{-1}(y) = x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

16° Soit p la probabilité que le dé tombe sur 1 ie. $\mathbb{P}(X=1) = p$. Alors $\mathbb{P}(X=k) = kp$ pour tout $k \in [\![1,6]\!]$ et, comme $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = 1$, on trouve l'équation $p+2p+3p+4p+5p+6p = 1 \Leftrightarrow 21p = 1$ donc $p = \frac{1}{21}$. Ce qui détermine bien la loi de X.

Alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6\times 7\times 13}{6\times 21} = \frac{13}{3}$ et de même on calcule $\mathbb{V}(X)$ *via* la formule de König-Huygens et la formule de transfert. Tout d'abord on a $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6} k^3 = \frac{6^2\times 7^2}{21\times 4} = 21$. Ainsi, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 21 - \frac{13^2}{3^2} = \frac{20}{9}$.

17° On pense « bien sûr » au TAF appliqué à la fonction $f = \sin$ qui est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f' = \cos$ donc majorée en valeur absolue par 1 sur $\mathbb{R}$. Enfin prendre $y = 0$ dans l'IAF pour avoir la conclusion.

Autre méthode : Assez clairement il ne faut vérifier le résultat que sur $[0,1]$ (sin et $x \mapsto x$ étant impaires on peut se restreindre sur $\mathbb{R}_+$, comme $\sin < 1$ le résultat est vrai pour $x \geq 1$). Il suffit donc de montrer que $f : x \mapsto \sin x - x$ est négative sur $[0,1]$, sa dérivée est $x \mapsto \cos x - 1$ qui est négative sur $[0,1]$ (car $\cos \leq 1$) qui est un intervalle donc f est décroissante, or $f(0) = 0$, d'où le résultat.

18° On a $s(1,0) = (-1/3, -4/3)$ et $s(0,1) = (-2/3, 1/3)$, ainsi $A = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut aussi, comme c'est la base canonique, utiliser que c'est la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $s(x,y)$ correspond à $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

La famille proposée est bien une base de $\mathbb{R}^2$: les vecteurs ne sont pas colinéaires et au nombre de deux. La matrice de passage de la base canonique à la base proposée est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et a pour inverse $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les formules de changement de base fournisse la matrice demandée $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alternative : on aurait tout aussi bien pu calculer les images de $(1,2)$ et $(1,1)$ par s puis déterminer leurs coordonnées dans la base $((1,2),(1,1))$; surtout ici vu le résultat obtenu : s est la symétrie d'axe la droite vectorielle engendrée par $(1,2)$.