



# RSF et filtres

## Questions de cours

- Quelles sont les grandeurs caractéristiques d'un signal sinusoïdal ?
- Quels sont les éléments connus d'un signal sinusoïdal en régime forcé ? Quels sont ceux que l'on cherche ?
- Qu'appelle-t-on période ?
- Définir la fréquence d'un signal périodique. Quelle est son unité ?
- Quelle est le lien entre la fréquence d'un signal sinusoïdal et sa pulsation ?
- On considère  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$  et  $i(t) = I \cos(\omega t + \psi)$ , à quelle condition sur  $\varphi$  et  $\psi$ , peut-on affirmer que  $u$  est en avance sur  $i$  ?
- Qu'appelle-t-on signaux synchrones ?
- Soit un signal sinusoïdal  $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ , donner l'expression de signal complexe  $\underline{x}(t)$  associé.
- Définir l'amplitude complexe  $\underline{X}$  associée à un signal sinusoïdal  $x(t)$ .
- À partir de  $\underline{X}$ , comment établit-on  $x(t)$  ?
- Qu'est-ce qu'un dipôle linéaire ?
- Par quelle grandeur peut-on caractériser un dipôle linéaire en régime sinusoïdal forcé (R.S.F.) ?
- Pour un dipôle traversé par un courant  $i(t)$ , et soumis à une tension  $u(t)$  à ses bornes, avec  $\arg(\underline{Z}) = \psi$  ( $\underline{Z}$  est l'impédance complexe du dipôle), quel est le déphasage entre la tension et le courant ? Qui, du courant ou de la tension, est en avance ( $\psi$  est compris entre  $-\pi$  et  $0$ ) ?
- Quelle est l'impédance complexe d'un conducteur ohmique, d'une bobine, d'un condensateur ?
- À quel dipôle est équivalent un condensateur à basse fréquence ? À haute fréquence ? Et pour une bobine ?
- Aux bornes d'une bobine, la tension est-elle en quadrature avance ou retard sur l'intensité ?
- Quelle est l'expression de l'admittance de deux impédances  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  en parallèle ?
- On considère une oscillateur en régime sinusoïdal forcé :

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$$

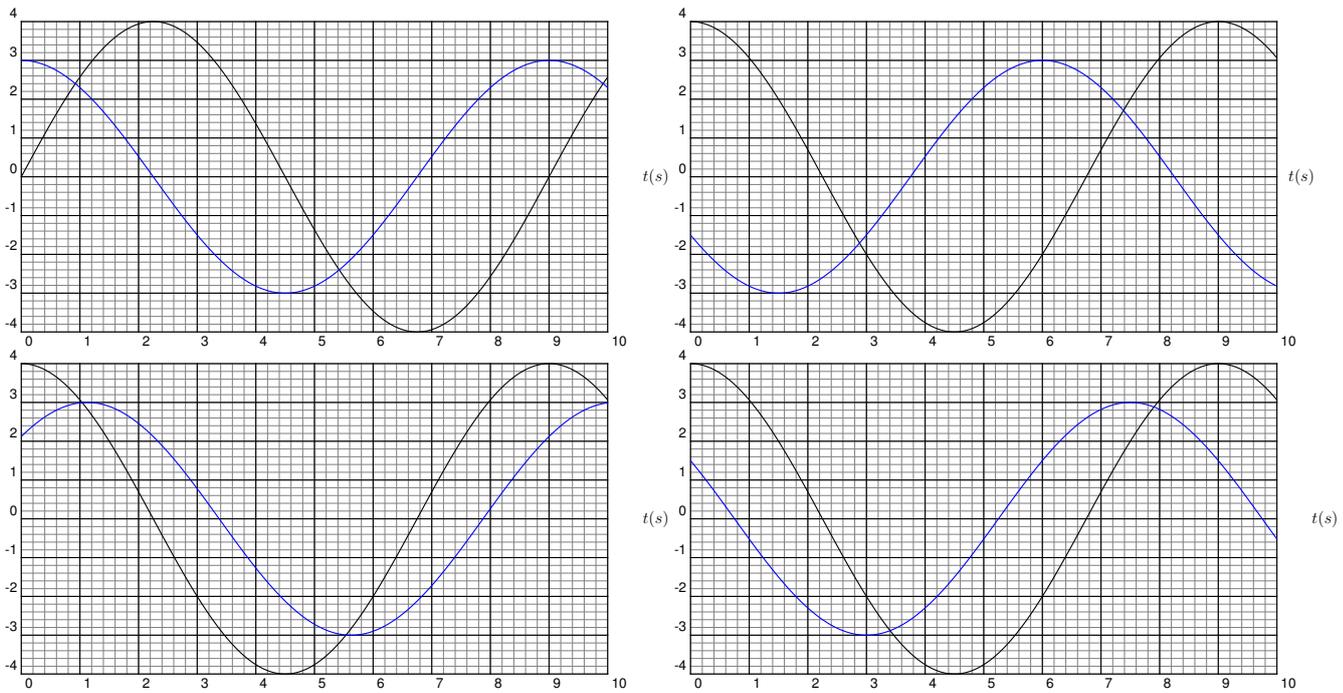
Quelle est la condition sur le facteur de qualité pour qu'il y ait résonance en amplitude du signal  $s$  étudié ? Comparer la pulsation de résonance à la pulsation propre  $\omega_0$ .

Quelle est la pulsation de résonance en amplitude de  $\dot{s}$  ?

- Donner l'expression générale, en série de Fourier, d'un signal périodique de pulsation  $\omega$ . Quelle est la valeur moyenne du signal ? La composante fondamentale ? Les composantes harmoniques ?
- Définir la valeur efficace d'un signal périodique  $s(t)$  de période  $T_0$ .
- Quelle est la valeur efficace d'un signal sinusoïdal d'amplitude  $S_m$  et de période  $T_0$  ? Établir cette dernière relation.
- Quelle est la valeur efficace d'un signal multifréquence périodique ?
- Définir la fonction de transfert complexe d'un quadripôle.
- Qu'appelle-t-on diagramme de Bode ?
- Définir le gain d'un filtre ainsi que le gain en décibel.
- Donner l'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1. Montrer que la pulsation de coupure à -3dB est égale à la pulsation propre du filtre. Donner les représentations asymptotique et réelle du diagramme de Bode.
- Quelle est l'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande ? Donner ses diagrammes de Bode asymptotique et réel.

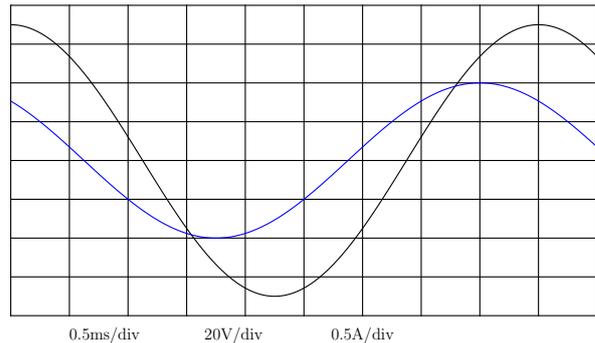
## Applications directes du cours

- 1 Soit une impédance complexe  $\underline{Z} = R + j.S$ , et l'admittance associée  $\underline{Y} = G + j.B$ .  $R$  est appelée la résistance,  $S$  la réactance,  $G$  la conductance et  $B$  la susceptance.  
Exprimer  $G$  et  $B$  en fonction de  $R$  et  $S$  et réciproquement.
- 2 Mesurer le déphasage entre  $u$  et  $i$  dans les cas suivants ( $u(t)$  est en noir et  $i(t)$  en gris) :



3 On considère un dipôle  $D$  inconnu dont on souhaite déterminer l'impédance complexe  $Z$ . On enregistre, pour cela, la tension  $u(t)$  à ses bornes (en noir) et l'intensité  $i(t)$  qui le parcourt (en gris) en convention récepteur.

1. Déterminer  $Z$  et  $\varphi$  (argument de  $Z$ ).
2. En déduire la partie réelle et la partie inductive de ce dipôle. Est-il inductif ou capacitif?
3. Ce dipôle est constitué d'un résistor et d'un condensateur en série. Déterminer leurs valeurs.

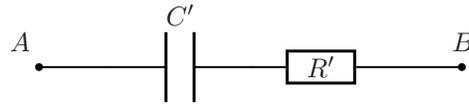
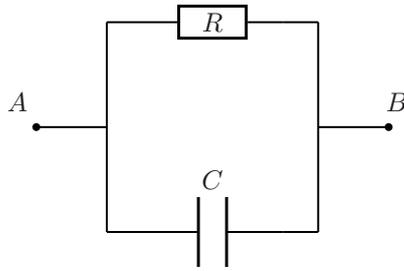


- 4 On considère un signal sinusoïdal  $e(t)$  centré autour de 0 V, d'amplitude  $A_0 = 4,0$  V et de fréquence  $f = 2,0$  kHz. Quelle est son expression? Donner sa représentation temporelle et sa représentation spectrale. Mêmes questions si  $e(t)$  est centré autour de  $B_0 = 1,0$  V.
- 2 Soit  $e(t)$  un signal multifréquence composé de deux signaux sinusoïdaux centrés autour de 0 V, un d'amplitude  $A_1 = 2,0$  V et de fréquence  $f_1 = 5,0$  kHz et l'autre d'amplitude  $A_2 = 3,0$  V, de fréquence  $f_2 = 15,0$  kHz et déphasé de  $\pi/4$  par rapport au premier. Quelle est son expression temporelle? Donner sa représentation spectrale. Quelle est sa valeur efficace?
- 3 Quelle est la valeur efficace d'un signal créneau centré autour de 0 V et d'amplitude  $S_m = 2,5$  V? Même question pour un ce signal créneau auquel on ajoute un "offset" de 2,5 V?
- 4 On considère un filtre passe-bas d'ordre 1, de gain continu  $G_0 = 0,5$  et de fréquence de coupure  $f_c = 100$  Hz. Donner l'expression de la fonction de transfert de ce filtre. Quelle est l'expression du signal de sortie  $s(t)$  sachant qu'on injecte en entrée le signal  $e(t) = E \cos(\omega t + \pi/4)$ , avec  $E = 1,0$  V et  $\omega = 400$  rad.s<sup>-1</sup>.

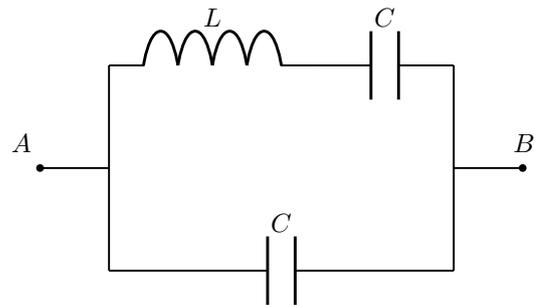
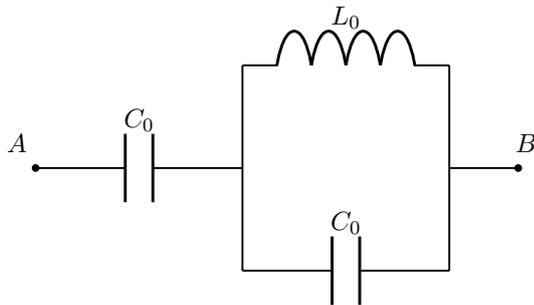
## Exercices

### 1. Impédances équivalentes

1. On considère les dipôles  $AB$  suivants en régime sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$ . Déterminer  $C'$  et  $R'$  en fonction de  $R$ ,  $C$  et  $\omega$  pour que ces dipôles soient équivalents (pour la pulsation  $\omega$  fixée).



2. Montrer que les dipôles  $AB$  suivants en régime sinusoïdal forcé peuvent être équivalents pour toute pulsation  $\omega$  à condition que  $L$  et  $C$  prennent une valeur bien déterminée par rapport à  $L_0$  et  $C_0$ .

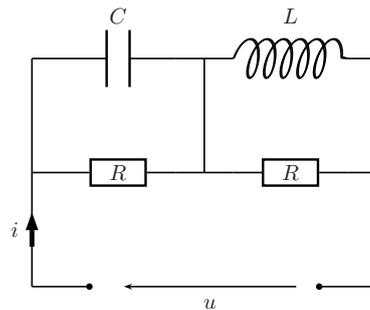


## 2. Déphasage

Soit le circuit ci-contre :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t).$$

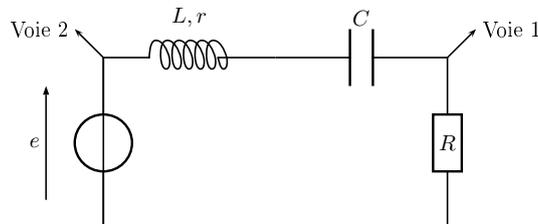
Quelle est la condition pour que le courant  $i$  soit en phase avec  $u$  quel que soit  $\omega$  ?

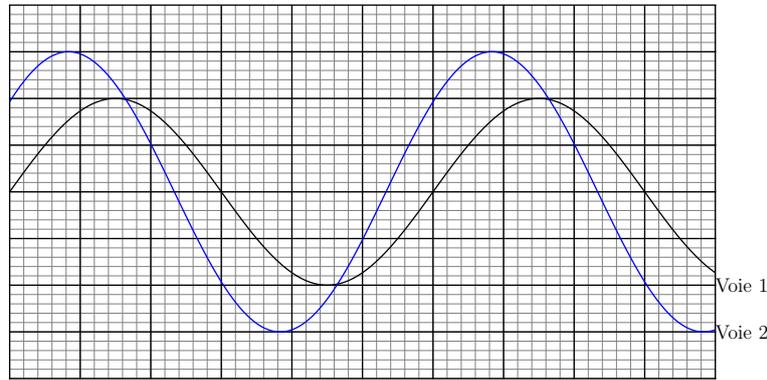


## 3. Détermination expérimentale des caractéristiques d'un circuit

Dans le circuit suivant figure un conducteur ohmique de résistance  $R$  inconnue, une bobine de résistance  $r$  inconnue et d'inductance  $L = 42 \text{ mH}$ , ainsi qu'un condensateur de capacité  $C$  inconnue. Le générateur fournit une tension sinusoïdale  $e(t)$ . On observe à l'oscilloscope la figure suivante avec les calibres voie 1 :  $1\text{V}/\text{division}$ , voie 2 :  $2\text{V}/\text{division}$ , horizontalement  $100\mu\text{s}/\text{division}$ .

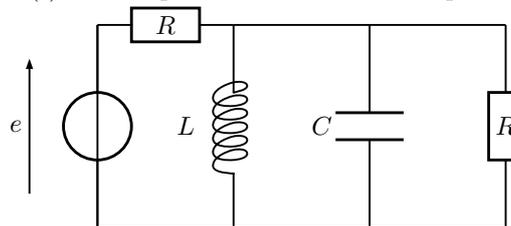
1. En notant  $u(t)$  la tension de la voie 1, exprimer  $\underline{U}$  en fonction de  $\underline{E}$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $\omega$ .
2. Une résonance a lieu pour la tension  $u$  à la fréquence  $f_0 = 1550 \text{ Hz}$ . Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer toutes les valeurs des composants.





#### 4. Résonance d'un circuit parallèle

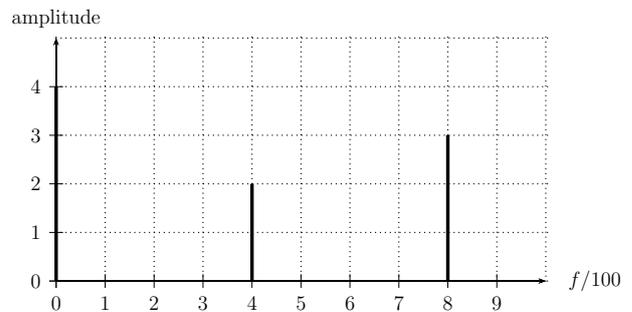
On considère le circuit ci-dessous où  $e(t)$  est une pulsation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .



1. Donner l'expression complexe de la tension  $s(t)$  aux bornes de l'association en parallèle  $RLC$ .
2. Établir qu'il y a un phénomène de résonance pour la tension  $s$ . On précisera la pulsation à laquelle ce phénomène se produit.
3. Que peut-on dire du déphasage entre  $s$  et  $e$  à la résonance ?
4. Comparer cette résonance avec celle en intensité d'un circuit  $RLC$  série.

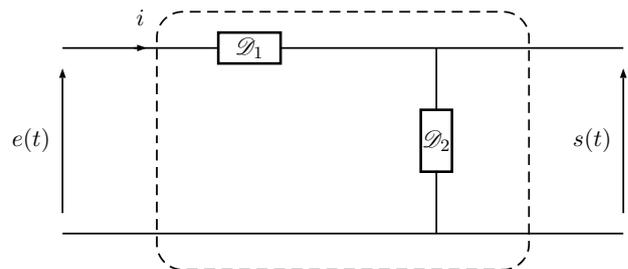
#### 5. Spectre en sortie de filtre

On considère un signal dont la représentation spectrale est donnée ci-contre. Donner la représentation spectrale du signal de sortie après un filtre passe-haut de fréquence de coupure  $f_c = 600$  Hz et de gain propre  $H_0 = 1$ .



#### 6. Filtre inconnu

Un quadripôle (ou quadripôle) constitué de deux dipôles ( $\mathcal{D}_1$ ) et ( $\mathcal{D}_2$ ), disposés comme l'indique la figure ci-contre, contient une résistance  $R$ , un condensateur de capacité  $C$  et une bobine d'inductance  $L$ . Seules les bornes d'entrée et de sortie sont accessibles à l'expérimentateur.



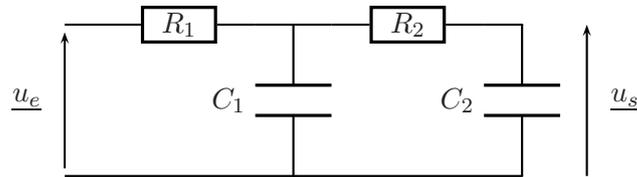
On réalise les mesures suivantes :

- On relie l'entrée à une pile de f.e.m  $e(t) = E_0 = 15$  V, la sortie étant ouverte. On mesure, en régime établi, un courant d'entrée d'intensité  $i(t) = I_0 = 15$  mA.

- On remplace la pile précédente par un générateur de tension sinusoïdale  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$  et on effectue une étude en fréquence du système. L'expérience montre qu'il s'agit d'un filtre passe-bande dont le gain passe par sa valeur maximale pour la fréquence  $f_0 = 1,16$  kHz et dont la bande passante à  $-3$  dB vaut  $\Delta f = 0,34$  kHz. Déterminer la disposition et la valeur numérique des composants dans le quadripôle.

## 7. Association de filtres

On considère le quadripôle ci-dessous.



1. Prévoir le comportement asymptotique de ce filtre.
2. Calculer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$  en fonction de  $\omega$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .
3. Montrer que le dénominateur peut se mettre sous la forme d'un produit de fonctions de transfert du premier ordre :

$$(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}),$$

sachant que l'on a :

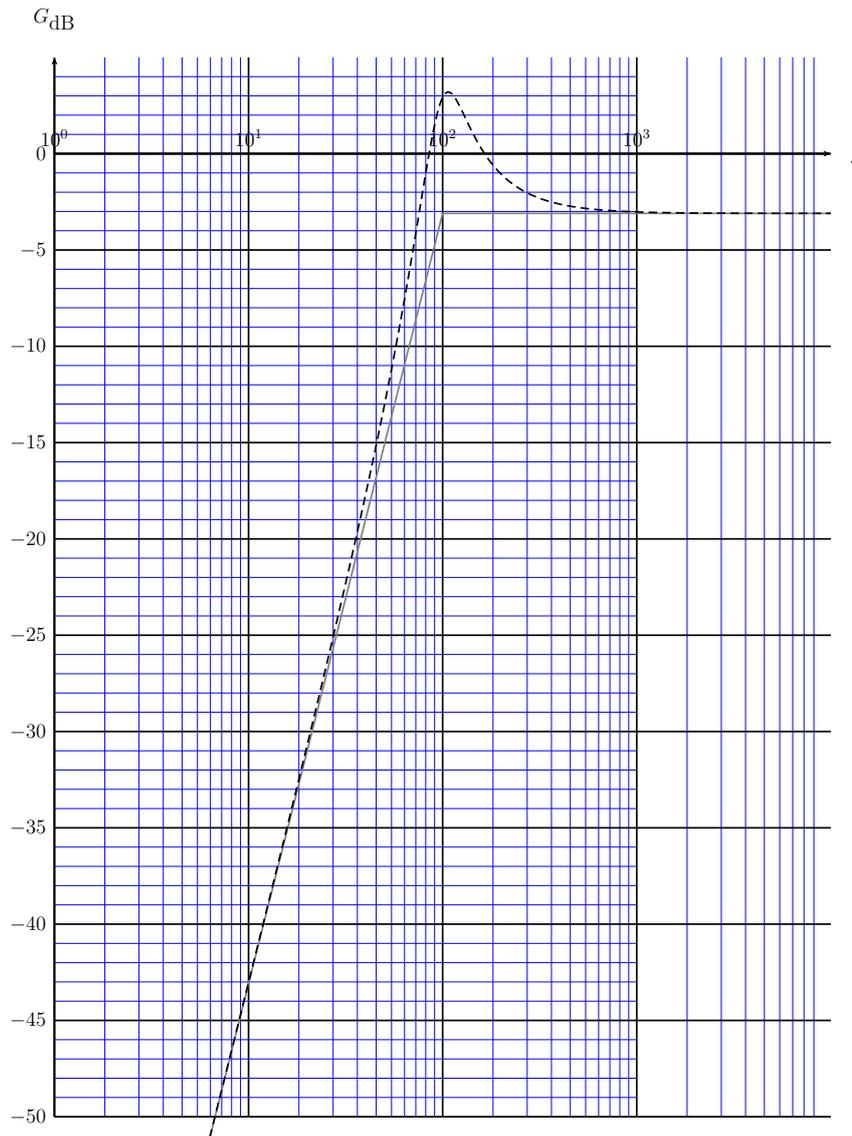
$$R_1 C_1 = R_2 C_2 = \tau = \frac{1}{\omega_0} \quad \text{et} \quad R_2 = 2R_1.$$

Exprimer  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en fonction de  $\omega_0$ .

4. Établir le diagramme de Bode.

## 8. Caractéristique d'un filtre

L'étude d'un filtre inconnu nous donne le diagramme de Bode ci-dessous, caractériser ce filtre (nom, ordre, fréquence propre, facteur de qualité).

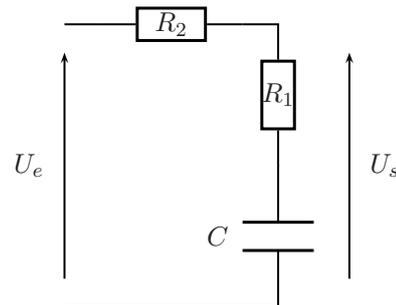


### 9. Fonction de transfert

On considère le circuit ci-contre.

1. Prévoir le comportement asymptotique de ce filtre.
2. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C$ , et la mettre sous la forme :

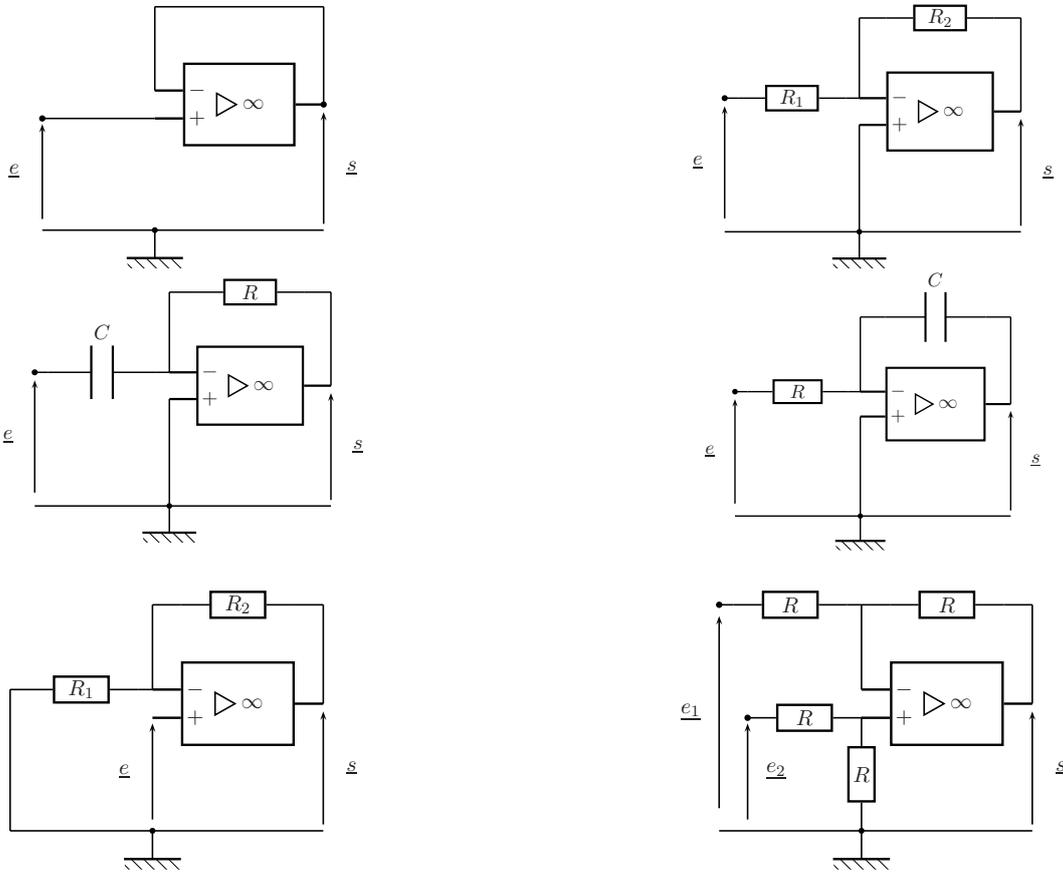
$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$$



3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique (on pourra se ramener à des sommes ou à des différences de gains en  $dB$  ou de phases concernant des filtres simples connus).  
On donne :  $C = 10 \text{ nF}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 9 \text{ k}\Omega$ .
4. Déterminer la bande passante à  $-3 \text{ dB}$ .
5. Déterminer l'équation différentielle liant  $u_s(t)$  à  $u_e(t)$ . Tracer l'allure de la réponse du système à un échelon de tension d'amplitude  $E$  pour un système initialement au repos.

### 10. ADDC et ALI

Vérifiez que vous savez calculer les exemples du cours : suiveur, amplificateurs inverseur et non-inverseur, soustracteur, dérivateur, intégrateur.

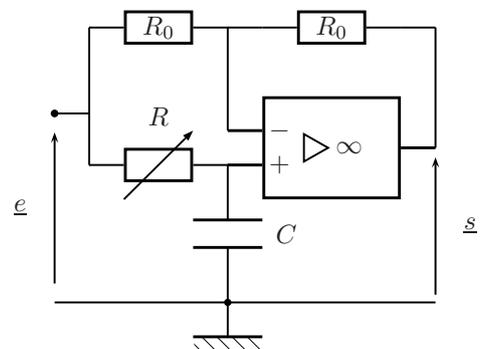


Pour chaque montage déterminer l'impédance d'entrée.

Rappel : par définition l'impédance d'entrée est égale au rapport entre la tension d'entrée et l'intensité d'entrée.

### 11. Déphaseur

1. Comparer les tension  $s(t)$  et  $e(t)$  à très basses et très hautes fréquences.
2. Déterminer la fonction de transfert  $H(j\omega)$  du montage.
3. Tracer le diagramme de Bode. Quel est l'intérêt de ce montage ?



## 12. Filtre actif

1. En étudiant le montage aux fréquences limites, déterminer la nature probable du filtre actif représenté ci-dessous.
2. Exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}(jx)$  en fonction de  $x = RC\omega$ .
3. Tracer la courbe donnant le gain dans le diagramme de Bode.
4. Exprimer la pulsation de coupure  $\omega_c$  de ce filtre.

