



## Devoir surveillé n°2

Samedi 15 octobre 2022

### Première partie

## Le manchot empereur

Source : Gilbert C. *et al.*, Energy saving processes in huddling emperor penguins : from experiments to theory, *Journal of Experimental Biology*, vol. 211, 2008, p. 1-8.

Le manchot empereur *Aptenodytes forsteri* est la plus grande espèce de manchots, avec en moyenne une taille de 1,2 m et une masse corporelle de 30 kg. Ce manchot est capable d'affronter sur de longues durées les conditions climatiques extrêmes de l'Antarctique, caractérisées par des températures moyennes de  $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$  lors des longues nuits polaires du mois de juin et des températures ressenties atteignant les  $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$  lorsque le blizzard souffle au plus fort. Le secret de cette exceptionnelle capacité d'isolation thermique réside dans toute une série d'adaptations, en particulier physiologiques et comportementales.

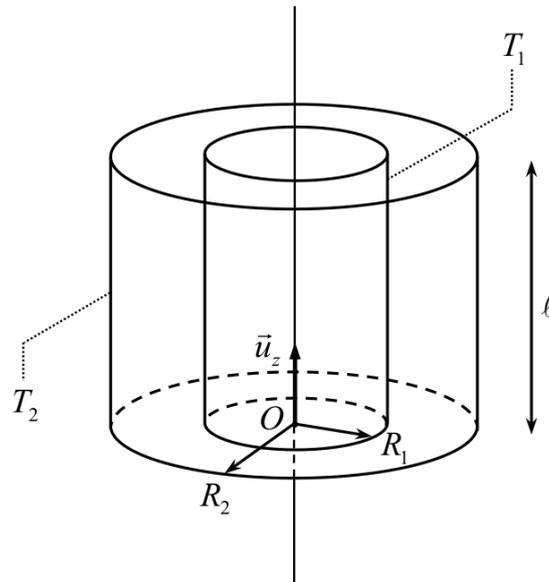
Du point de vue des échanges thermiques, on modélise un manchot par un cylindre d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de rayon  $R = 10\text{ cm}$ , de longueur  $\ell = 1,2\text{ m}$ , recouvert successivement :

- d'une couche de graisse d'épaisseur  $e_g = 2,0\text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_g = 0,20\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- d'une couche de filaments duveteux enfermant une épaisseur  $e_a = 1,0\text{ cm}$  d'air de conductivité thermique  $\lambda_a = 0,026\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- d'une couche très dense de plumes courtes et raides, disposées en diagonale et imbriquées les unes dans les autres pour former un véritable « coupe-vent » imperméable à l'eau, d'épaisseur  $e_p = 2,0\text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_p = 0,035\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

En régime stationnaire, le métabolisme de l'animal fournit une puissance  $\mathcal{P}_m$  permettant de maintenir sa température interne  $T_i$  constante.

## II.1 - Généralités

On considère deux cylindres de même axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de longueur  $\ell$  et de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , de surfaces latérales isothermes portées aux températures respectives  $T_1$  et  $T_2 < T_1$  (**figure 4**).



**Figure 4** - Conducteur thermique à symétrie cylindrique

Le milieu séparant ces deux surfaces, homogène, isotrope, de conductivité thermique  $\lambda$ , est le siège d'un phénomène de transfert thermique uniquement radial en négligeant tout effet de bord. On suppose le régime stationnaire atteint. En tout point  $M$  du milieu, repéré par ses coordonnées cylindriques dans le repère  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , la température  $y$  est donc fonction uniquement de la distance  $\rho$  à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  :  $T(M) = T(\rho)$ .

**Q10.** Le vecteur associé au flux thermique  $\Phi_{th}$  est le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}$ .

Que représente physiquement la norme de ce vecteur ? Préciser son unité.

**Q11.** Justifier que  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \vec{u}_\rho$ . Justifier physiquement le signe moins.

**Q12.** Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , pour la portion du milieu comprise entre les cylindres d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de longueur  $\ell$ , de rayons  $\rho$  et  $\rho + d\rho$  ( $R_1 < \rho < R_2$ ). En déduire que l'expression du champ de température  $T(\rho)$  en tout

point  $M$  du milieu est :  $T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1 / R_2)} \ln(\rho / R_1) + T_1$ .

**Q13.** Définir la résistance thermique  $R_{th}$  du milieu. Montrer qu'elle s'écrit :  $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ .

## II.2 - Détermination du métabolisme d'un manchot

- Q14.** Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur adoptée du rayon  $R$  du cylindre modélisant un manchot supposé uniquement constitué d'eau.
- Q15.** En régime stationnaire, justifier que le flux thermique  $\Phi_{th}$  dégagé par un manchot est égal à la puissance  $\mathcal{P}_m$  due à son métabolisme.
- Q16.** Comment sont associées les résistances thermiques de chacune des couches recouvrant un manchot ? Justifier. À partir du résultat de **Q13**, donner l'expression de la résistance thermique  $R_{th,1}$  équivalente à cette association en fonction notamment des conductivités thermiques et des épaisseurs des différentes couches. Calculer la valeur de  $R_{th,1}$ .
- Q17.** Les transferts thermiques entre la face extérieure du plumage du manchot à la température  $T_p$  et l'air extérieur à la température  $T_e$  sont modélisés par une densité de courant thermique conducto-convectif :  $\vec{j}_{th,cc} = h(T_p - T_e)\vec{u}_\rho$  où  $h$  est le coefficient de transfert conducto-convectif. En se limitant à la surface latérale du cylindre d'aire  $S$  modélisant le manchot, exprimer en fonction de  $h$  et  $S$  la résistance thermique  $R_{th,cc}$  associée à ce transfert.
- Q18.** En considérant que le manchot et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs de températures respectives  $T_p$  et  $T_e$  très proches, on admet que le flux radiatif surfacique  $\varphi_r$  émis par le manchot, s'écrit :  $\varphi_r \cong 4\sigma T_e^3(T_p - T_e)$  où  $\sigma$  est la constante de Stefan.
- Exprimer, en fonction de  $\sigma$ ,  $T_e$  et  $S$ , la résistance thermique  $R_r$  associée à ce transfert si on se limite ici aussi à la surface latérale du cylindre modélisant le manchot.
- Q19.** Comment sont associées les résistances thermiques correspondant aux transferts conducto-convectifs et radiatifs ? Justifier. Donner l'expression de la résistance thermique  $R_{th,2}$  équivalente à cette association en fonction de  $\sigma$ ,  $T_e$ ,  $h$  et  $S$ . Calculer la valeur de  $R_{th,2}$  lorsque le manchot se trouve dans un environnement à la température  $T_e = -17^\circ\text{C}$  en présence d'un vent de vitesse  $V = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . On admettra que le coefficient de transfert conducto-convectif s'écrit :  $h = 5,7 + 3,5\cdot V$  où  $V$  est exprimé en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $h$  en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .
- Q20.** Donner l'expression en la justifiant de la résistance thermique totale  $R_{th,tot}$  du manchot en fonction de  $R_{th,1}$  et  $R_{th,2}$ . En déduire la valeur de la puissance  $\mathcal{P}_m$  due au métabolisme nécessaire à un manchot pour maintenir une température interne  $T_i = 37,7^\circ\text{C}$  dans un environnement à la température  $T_e = -17^\circ\text{C}$  et en présence d'un vent de vitesse  $V = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vérifier que la puissance  $\mathcal{P}_m$  est de l'ordre de 50 W.

En plus de ses exceptionnelles capacités d'isolation thermique, le manchot empereur a développé une ultime stratégie pour réduire ses déperditions de chaleur : la thermorégulation sociale consistant à s'assembler en très grands groupes compacts de plusieurs centaines d'individus.

Des travaux de recherche menés en 2007 par l'équipe française de Caroline Gilbert ont évalué expérimentalement les bénéfices de ce comportement. Ils ont pour cela mesuré la puissance  $\mathcal{P}_m$  due au métabolisme sur trois groupes de manchots, à partir de leur perte de poids en fonction du temps. Les premiers étaient seuls, isolés dans des enclos. Les seconds étaient parqués dans des enclos par petits groupes de 5 à 10 individus. Les troisièmes étaient libres de se déplacer et pouvaient s'assembler en très grands groupes. Les trois populations étaient soumises aux mêmes conditions d'environnement : température extérieure moyenne de  $-17\text{ °C}$  et un vent moyen de  $5,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le tableau suivant rassemble leurs observations (**tableau 1**).

	Isolé	Petits groupes	Grands groupes
$\mathcal{P}_m$ (W)	85	52	43

**Tableau 1** - Puissance due au métabolisme dans trois groupes de manchots différents

**Q21.** À la lumière des résultats de l'équipe de recherche de Caroline Gilbert, discuter la modélisation effectuée dans cette partie. Expliquer brièvement pourquoi les grands rassemblements de manchots réduisent la puissance due à leur métabolisme.

## Deuxième partie

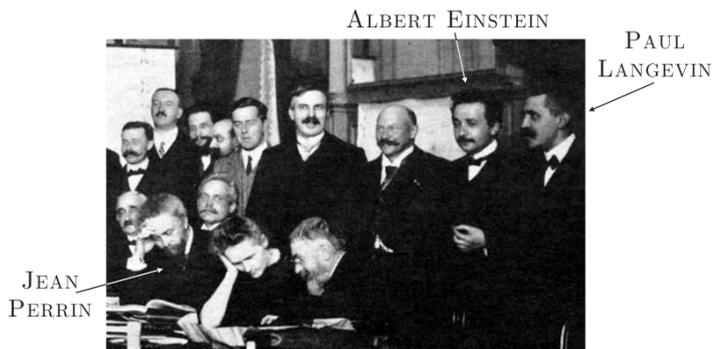
# Jean Perrin et l'hypothèse atomique

Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par ALBERT EINSTEIN en 1905 et complétées par celles de PAUL LANGEVIN en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par JEAN PERRIN dont nous fêtons le 150<sup>e</sup> anniversaire de naissance. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. Elles ont clos la « controverse atomiste » ouverte par les Grecs 6 siècles avant notre ère !

Après avoir pris connaissance des résultats de PERRIN, en 1908, l'un des derniers farouches anti-atomistes, WILHELM OSTWALD, déclare « *Je suis désormais convaincu que nous sommes entrés en possession de preuves expérimentales du caractère discret ou granulaire de la nature, que l'hypothèse atomique avait cherchées en vain depuis des millénaires* ».

Les expériences de PERRIN et le modèle de LANGEVIN reposent entièrement sur les modèles microscopiques de LUDWIG BOLTZMANN, fondateur dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle de la physique statistique. Les travaux expérimentaux de PERRIN lui permirent notamment de mesurer la constante de BOLTZMANN  $k_B$ . En 1906, donc peu de temps avant la publication de ces travaux, BOLTZMANN se suicida, las des critiques et des attaques des disciples d'OSTWALD...

En 1926, PERRIN obtint le prix NOBEL pour ses expériences !



Dans ce sujet, nous proposons de revenir sur quelques points de ce moment fameux de l'histoire de la physique en étudiant quelques aspects de la théorie de LANGEVIN et de certaines des expériences réalisées par PERRIN. Sur la photo ci-contre, prise lors du Congrès SOLVAY de 1911, on retrouve les trois acteurs de cette histoire, entourés de prestigieux collègues. Pour réaliser ses expériences, JEAN PERRIN utilise des grains de gomme-gutte. Écou-

tons le décrire son procédé d'obtention de ses grains : « *La gomme-gutte, qu'on utilise pour l'aquarelle, provient de la dessiccation du latex. Un morceau de cette substance, frotté avec la main sous un mince filet d'eau distillée se dissout peu à peu en donnant une belle émulsion opaque d'un jaune vif, où le microscope révèle un fourmillement de grains jaunes de diverses tailles parfaitement sphériques. On peut calibrer ces grains jaunes et les séparer du liquide où ils baignent par une centrifugation énergique.* »

Dans tout ce problème, ces grains seront donc supposés identiques, de forme sphérique, de rayon  $R_b = 0,2 \mu\text{m}$ , de volume  $V_b = 3,4 \times 10^{-20} \text{ m}^3$  et de masse volumique  $\mu_b = 1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On note  $m_b = 4,1 \times 10^{-17} \text{ kg}$  la masse d'un grain. Dans ses expériences, JEAN PERRIN fabrique une émulsion en introduisant ces grains dans de l'eau légèrement sucrée. Ce liquide possède une masse volumique assimilable à celle de l'eau pure  $\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Le peu de sucre dissous dans l'eau lui confère tout de même un caractère visqueux. De ce fait, l'eau exerce sur les grains en mouvement lent deux forces :

- la résultante des forces de pression, peu modifiée par rapport à une situation d'équilibre, est donnée par la loi d'ARCHIMÈDE : cette force  $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$  est exactement opposée au poids du liquide déplacé par chaque grain ;
- la résultante des forces de frottement visqueux se traduit par une force  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\alpha > 0$  et  $\vec{v}$  désigne la vitesse des grains. La formule de STOKES précise que, pour un grain sphérique,  $\alpha = 6\pi\eta R_b$  dans laquelle  $\eta = 1,2 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  représente le coefficient de viscosité dynamique de l'eau légèrement sucrée. Avec ces valeurs numériques, on trouve ici  $\alpha = 4,5 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Dans ce qui suit on utilisera la fonction  $A(z) = \exp(-z/H)$ . Les vecteurs sont surmontés d'une flèche  $\vec{f}$ , sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ( $\|\hat{e}_x\| = 1$ ). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. La valeur moyenne temporelle d'une fonction  $\varphi(t)$  sera notée  $\langle \varphi \rangle$ . Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. **Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte.**

## I Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

On considère un gaz parfait constitué de molécules identiques, de masse molaire  $M = 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , en équilibre thermique à la température ambiante  $T_0$ . Le gaz, soumis à la pesanteur, est au repos dans un récipient de volume  $V$ , de hauteur  $h$  de l'ordre de quelques mètres, et de section  $S = 1 \text{ m}^2$ . L'encombrement caractéristique d'une molécule constituant ce gaz est une sphère de rayon  $R_m$  de l'ordre de la centaine de picomètres.

On rappelle les valeurs de l'accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , de la constante de BOLTZMANN,  $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , de la constante d'AVOGADRO,  $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  et éventuellement de leur produit  $R = k_B N_A = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

- – 1. En précisant les valeurs choisies de température  $T_0$  et de pression (supposée provisoirement uniforme)  $P_0$ , estimer le volume molaire du gaz. En déduire une estimation du rapport entre le volume occupé par l'ensemble des sphères associé aux molécules et le volume du récipient.
- – 2. Rappeler la définition d'un gaz parfait. Les ordres de grandeur établis à la question précédente justifient-ils d'adopter ce modèle dans la suite ?
- – 3. Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_{cm}$  et de l'énergie potentielle  $E_{pm}$  d'une particule de masse  $m_m$  de ce gaz. Pourquoi observe-t-on qu'à température ambiante ces molécules ne se regroupent pas au fond du récipient ?

## II Étude d'un équilibre de sédimentation

Dans une première expérience, JEAN PERRIN lâche, sans vitesse initiale, à la surface d'un récipient, un grand nombre ( $N = 13\,000$ ) de grains dans de l'eau légèrement sucrée. Le récipient a une section  $S$  et une hauteur  $h_1$  suffisante pour être considérée comme infinie.

- – 8. Faire le bilan des forces exercées sur un des grains lors de sa chute dans l'eau sucrée.
- – 9. On note  $\vec{v}(t) = -v(t)\hat{e}_z$  la vitesse de chute du grain,  $\hat{e}_z$  étant l'axe vertical ascendant, et  $v(t) > 0$ . Établir l'équation différentielle vérifiée par  $v(t)$  puis donner sa solution.  
Montrer qu'une fois le régime permanent établi, les grains possèdent une vitesse limite  $v_\ell = m^*g/\alpha$ .  
Exprimer le paramètre  $m^*$  en fonction de  $V_b$  et des masses volumiques  $\mu_b$  et  $\mu_e$ . Justifier qu'on nomme cette quantité « masse apparente ».  
Exprimer la durée caractéristique  $\tau$  du régime transitoire en fonction de  $m_b$  et  $\alpha$ . Evaluer un ordre de grandeur de  $v_\ell$  et de  $\tau$ .

Même au bout d'une longue durée, les grains ne se tassent pas au fond du récipient. On observe un phénomène de sédimentation : les grains se répartissent sur l'ensemble de la hauteur et la densité de grains, notée  $c(z)$  et exprimée en  $\text{m}^{-3}$ , n'est pas uniforme.

Afin d'interpréter ce phénomène, on introduit deux vecteurs, appelés « densité de flux de particules » et qui s'expriment dans les mêmes unités mais par des lois distinctes :

- Un premier vecteur densité de flux,  $\vec{j}_c$ , est associé au mouvement de chute des grains. Il est à l'origine d'un phénomène de convection et défini par la relation  $\vec{j}_c(z) = -c(z) v_\ell \hat{e}_z$  ;
- Un deuxième vecteur densité de flux est associé au gradient de densité, ici sur l'axe  $z$ . L'inhomogénéité crée un courant de particules dont l'expression est donnée par la loi de FICK qui s'écrit ici  $\vec{j}_n(z) = -\frac{dc}{dz} D \hat{e}_z$ . Le coefficient  $D$  se nomme coefficient de diffusion. Il dépend de la nature du milieu et des particules étudiées. Aucune connaissance relative à la loi de FICK n'est nécessaire à l'étude du problème.

- – 10. Donner les unités (ou dimensions) communes aux vecteurs  $\vec{j}_c$  et  $\vec{j}_n$ , ainsi que l'unité de  $D$ . À l'état d'équilibre macroscopique, caractérisé par une température uniforme  $T_0$  et une répartition de concentration  $c(z)$  indépendante du temps, quelle est la relation entre  $\vec{j}_c$  et  $\vec{j}_n$  ? En déduire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $c(z)$ .

En posant  $c(z=0) = c_0$ , exprimer  $c(z)$  en fonction de  $A(z)$ , on déterminera la distance caractéristique  $H_b$  apparaissant dans  $A(z)$  en fonction de  $R_b$ ,  $D$ ,  $\eta$ ,  $m^*$ , et  $g$ .

- – 11. Compte tenu des forces conservatives s'exerçant sur un grain, quelle est l'expression de l'énergie potentielle  $E_p^*(z)$  correspondant au poids de la masse apparente  $m^*$  du grain à l'altitude  $z$  ? En déduire l'expression de  $D$  en fonction de  $k_B$ ,  $T_0$ ,  $\eta$  et  $R_b$  permettant d'écrire  $A(z) = \exp\left[-\frac{E_p^*(z)}{k_B T_0}\right]$ .

- – 12. Sachant que le nombre  $N$  de grains est conservé sur la hauteur  $h_1$  du récipient, suffisamment grande pour être supposée infinie, exprimer la concentration  $c_0$  en fonction de  $N$ , de la section  $S$ , et de la distance caractéristique  $H_b$ .

Une fois la température de l'émulsion stabilisée à une valeur uniforme  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , JEAN PERRIN a compté le nombre moyen  $n(z)$  de grains dans des petites tranches régulièrement réparties en hauteur et d'épaisseur  $e$  constante. Il publie les résultats que nous avons synthétisés sur la figure 1 (Annales de Chimie et de Physique, Mouvement brownien et réalité moléculaire, 8<sup>e</sup> série, sept. 1909).

- – 13. En exprimant  $c(z)$  en fonction de  $n(z)$ , déduire de ces données une estimation de la hauteur caractéristique  $H_b$  associée ici au phénomène. La hauteur du récipient utilisé par JEAN PERRIN,  $h_1 = 100 \mu\text{m}$ , était-elle suffisante au regard des hypothèses faites ici ?

- – 14. Estimer la valeur de  $k_B$  qu'a pu déduire JEAN PERRIN de cette expérience. Identifier des causes d'erreurs expérimentales.

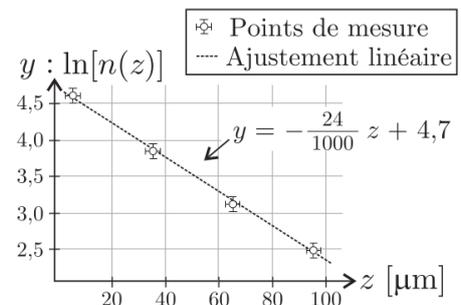


FIGURE 1 – Sédimentation de grains

## Troisième partie

# Refroidir les centres de données

Un centre de données — *data center* en anglais — est un lieu regroupant des installations informatiques chargées de stocker et de distribuer des données (*data*). Ces dernières années, l'expansion des services en ligne a entraîné une croissance exponentielle du nombre de centres de données, dégageant de grandes quantités de chaleur. La régulation en température de ces lieux est donc devenue un enjeu environnemental majeur.

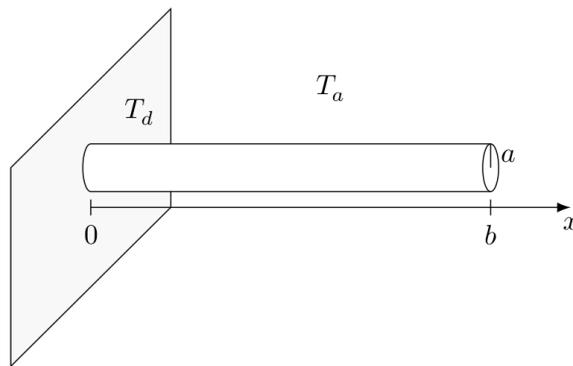
Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

### I.A – À l'échelle des composants

À l'échelle des composants, il est nécessaire d'évacuer la chaleur dégagée, par les transistors des microprocesseurs notamment. Pour ce faire, des ventilateurs sont installés afin de renouveler en permanence l'air au contact des composants. De plus, des ailettes de refroidissement sont assemblées directement sur la surface des composants afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.

On modélise une de ces ailettes par un cylindre d'axe  $(Ox)$ , de rayon  $a$ , de longueur  $b \gg a$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . Elle est accolée en  $x = 0$  au composant de température  $T_d$  ; le contact thermique en  $x = 0$  est supposé parfait. Le reste de l'ailette est au contact de l'air que l'on suppose de température  $T_a$  uniforme.



**Figure 1** Modélisation de l'ailette

En régime stationnaire, supposé atteint dans toute cette sous-partie, la température  $T(x)$  est considérée comme uniforme sur la section droite de l'ailette située à l'abscisse  $x$  pour tout  $x \in [0, b]$ .

**Q 1.** Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_Q$  qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

L'air qui entoure le solide, constamment renouvelé et de température uniforme  $T_a$ , échange avec l'ailette un transfert conducto-convectif. Dans une fine couche de fluide au contact de la surface du solide, ce transfert latéral peut-être modélisé par la loi de Newton :

$$\vec{j}_{cc}(x) = h(T(x) - T_a) \vec{n}$$

où  $\vec{j}_{cc}$  correspond à la densité de flux conducto-convectif et  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire, normal à la surface d'échange et orienté du solide vers l'air. Le coefficient  $h$ , dont certaines valeurs numériques sont disponibles en fin d'énoncé, est appelé coefficient de transfert thermique de surface.

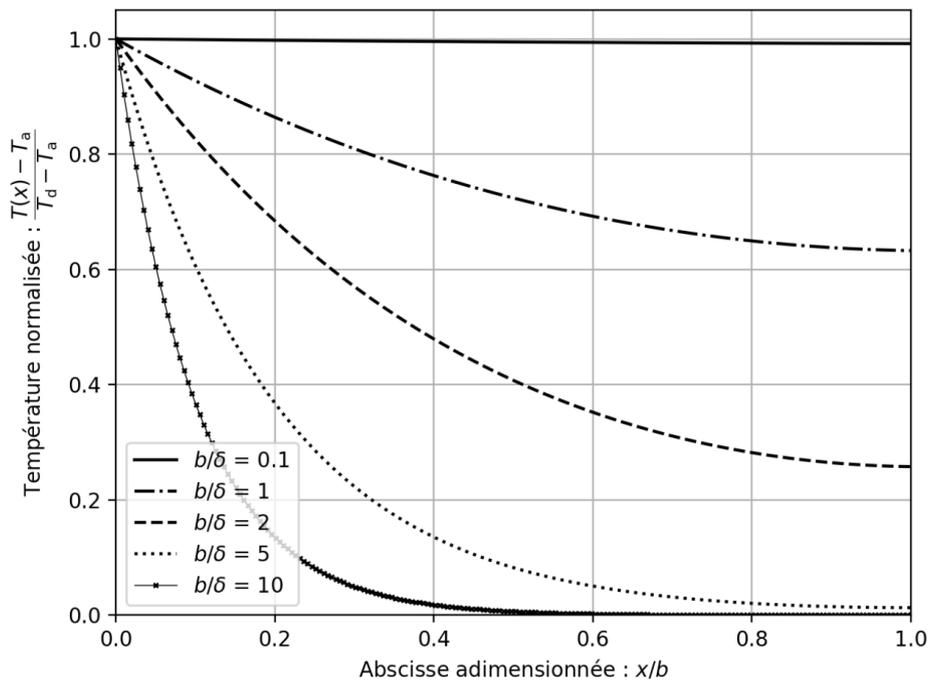
**Q 2.** En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur  $dx$  de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}. \quad (\text{I.1})$$

**Q 3.** Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre  $\delta$  introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon  $a = 1$  mm.

**Q 4.** Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température  $T(x)$  en  $x = 0$  et en  $x = b$ .

Sur la figure 2 est représentée la solution « normalisée » de l'équation (I.1), définie par  $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a}$ , en fonction de l'abscisse adimensionnée  $x/b$ , pour différentes valeurs du rapport  $b/\delta$ .



**Figure 2** Représentation graphique du champ de température dans une ailette en silicium (solution de l'équation (I.1)) pour différentes valeurs du rapport  $b/\delta$

**Q 5.** En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de  $T(x)$  dans le cas où  $b \gg \delta$ . Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

On définit la résistance thermique  $R_{th}$  de l'ailette de refroidissement par  $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{P}}$ , où  $\mathcal{P}$  désigne la puissance thermique totale évacuée par l'ailette dans l'air.

**Q 6.** La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport  $b/\delta$ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de  $R_{th}$  commune aux différents matériaux lorsque  $b \ll \delta$  ; justifier sa valeur numérique.

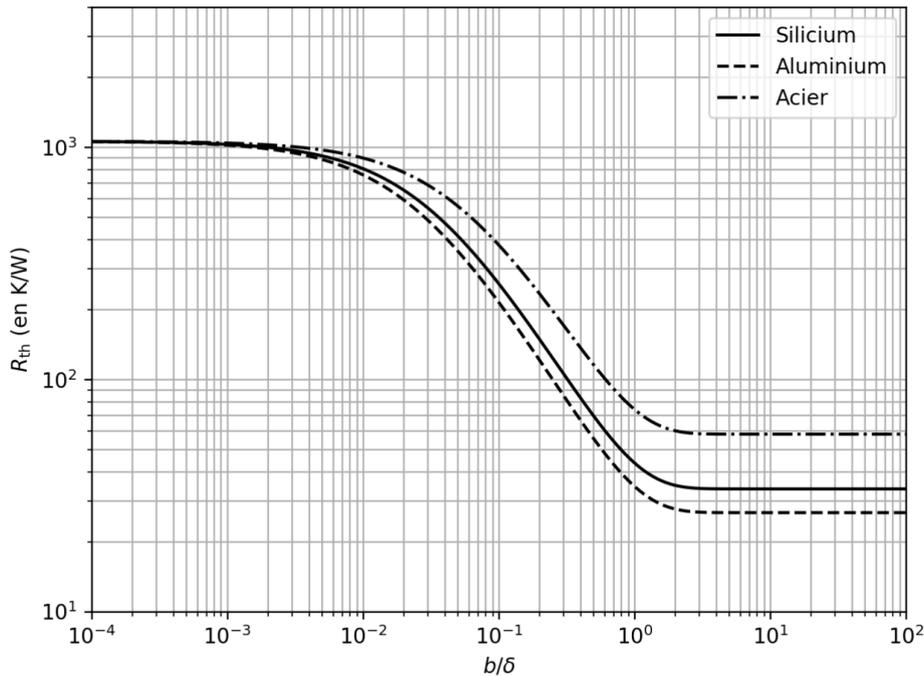
**Q 7.** Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique  $R_{th}$  de l'ailette en silicium dans le cas où  $b \gg \delta$ .

**Q 8.** En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à  $b = 2$  cm. En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon  $a = 1$  mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède par  $60^\circ\text{C}$  en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

### I.B – À l'échelle des locaux

Dans toute cette sous-partie, on s'intéresse au système de refroidissement d'une salle informatique de  $25 \text{ m}^3$ , située dans le sud de la France, dans laquelle sont placés plusieurs serveurs de données. L'objectif est de maintenir la température de la salle à une valeur inférieure ou égale à  $T_{\text{max}} = 35 \text{ °C}$ , sachant que les serveurs de données dégagent une énergie thermique de  $100 \text{ kW}\cdot\text{h}$  chaque jour.

**Q 9.** La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.

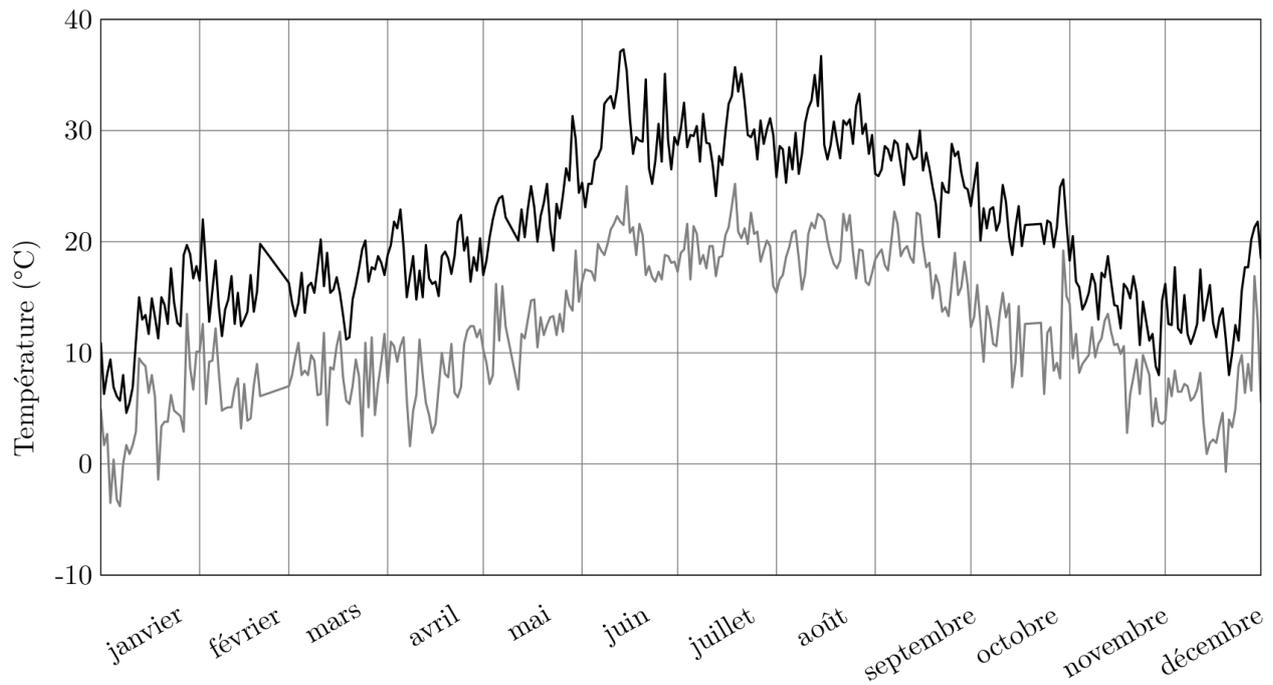


**Figure 3** Évolution de la résistance thermique d'une ailette de rayon  $a = 1 \text{ mm}$ , en présence de ventilation, en fonction du rapport  $b/\delta$

Afin de réduire les dépenses engagées pour le refroidissement de la salle, une alternative intéressante est celle du *free-cooling*, qui consiste à ventiler la salle tout en exploitant la fraîcheur de l'air extérieur. Pour ce faire, on a recours à l'installation d'un ventilateur pouvant remplacer l'air de la pièce avec le débit de volume  $D_v = 830 \text{ m}^3\cdot\text{h}^{-1}$ . La puissance absorbée par le ventilateur est  $\mathcal{P}_v = 60 \text{ W}$ .

**Q 10.** L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température  $T_{\text{max}}$ . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique  $\rho_{\text{air}}$  de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air  $D_m$ , en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

Les relevés annuels de température à l'extérieur de la salle sont présentés sur la figure 4.



**Figure 4** Relevé des températures journalières minimales et maximales à l'extérieur de la salle pour l'année 2021 (source [infoclimat.fr](http://infoclimat.fr))

Lorsque le système de *free-cooling* ne permet pas de maintenir la température de la salle à une température inférieure ou égale à  $T_{\max}$ , le système de conditionnement d'air prend le relais et le système de *free-cooling* s'arrête.

**Q 11.** À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de *free-cooling* est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de *free-cooling* dans cette salle informatique.

## Données

Conductivité thermique du silicium	$\lambda_{\text{Si}} = 148 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'aluminium	$\lambda_{\text{Al}} = 237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'acier	$\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique)	$h_s = 30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé)	$h_r = 300 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Prix du kW·h	0,17 €
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6,40 \times 10^6 \text{ m}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique du lithium	$M_{\text{Li}} = 6,94 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique du carbone	$M_{\text{C}} = 12,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique de l'azote	$M_{\text{N}} = 14,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique de l'oxygène	$M_{\text{O}} = 16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$