Diffusion thermique

I Généralités

I.1 Équilibre thermodynamique local

I.2 Mécanismes de transfert thermique

a La conduction thermique

b La convection thermique

c Le rayonnement

II Flux thermique

II.1 Vecteur densité de courant thermique

Le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}(M,t)$ est tel que le transfert thermique élémentaire δQ à travers la surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\delta Q = \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}\ \mathrm{d}t$$

II.2 Flux thermique

Le flux thermique noté Φ_{th} est la puissance du transfert thermique.

a À travers une surface orientée $\mathscr{S}$

$$\Phi_{\mathrm{th}}(t) = \iint_{M\in\mathscr{S}} \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}(M,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$$

b Pour un système fermé Σ avec $\mathscr{S}$ surface de contrôle

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le système Σ **reçoit** δQ tel que

$$\delta Q = \Phi_{\mathrm{th}}(t)\mathrm{d}t = -\oiint_{M\in\mathscr{S}} \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}(M,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}\,\mathrm{d}t$$

avec $\mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \mathrm{d}S_m\overrightarrow{n_M}$, **normale sortante**.

II.3 Loi de Fourier

Expérimentalement, si les variations de températures ne sont pas trop importantes, on rend compte localement des phénomènes de conduction de la chaleur par la **loi de Fourier**, à savoir le vecteur densité de flux de chaleur $\overrightarrow{j_Q}$ est égal à :

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$$

λ est la conductivité thermique.

Milieu	Air	Eau	Bois	Verre	Béton	Brique
λ en W.m^{-1}.K^{-1}	0,03	0,6	0,3	1,2	0,92	0,84
Milieu	Cuivre	Aluminium	Acier-Inox	Laine de verre	Polystyrène expansé	
λ en W.m^{-1}.K^{-1}	390	237	26	0,03-0,04	0,036	

III Bilan thermique

III.1 Bilan local pour un transfert unidimensionnel

Bilan thermique local (savoir l'établir) :

$$\boxed{\rho c\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_Q(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{en l'absence de sources} \\ p(x,t) & \text{avec un taux production interne } p \end{cases}}$$

III.2 Bilan local en symétrie cylindrique

III.3 Bilan local en symétrie sphérique

III.4 Généralisation du bilan local

III.5 Équation de la diffusion thermique

ou équation de la chaleur, avec un terme de production local :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\Delta T + \frac{p}{\rho c}}$$

En l'absence de terme de production :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\Delta T \quad \text{: équation de diffusion}}$$

IV Résolution de l'équation de la chaleur

IV.1 Généralités

Conditions aux limites

- Continuité du flux thermique : $\overrightarrow{j_\mathrm{Q}}(M,t)\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{j_{\mathrm{Q_{ext}}}}\cdot\overrightarrow{n}$
- Paroi calorifugée : $\overrightarrow{j_\mathrm{Q}}(M,t)\cdot\overrightarrow{n} = 0$
- Contact thermique parfait entre deux solides : $T(M,t) = T_\mathrm{ext}(M,t)$
- Contact solide-fluide : $\overrightarrow{j_\mathrm{Q}}(M,t) = h\left(T(M,t) - T_\mathrm{fluide}\right)\overrightarrow{n}_{\mathrm{solide}\rightarrow\mathrm{fluide}}$

IV.2 Cas du régime stationnaire en l'absence de source interne

a Conservation du flux

b Exemples de champ de température

c Résistance thermique

Analogie avec l'électricité

	Conduction thermique	Conduction électrique
Grandeur transportée	énergie interne U	charge q
Loi d'Ohm	$T_1 - T_2 = R_{th}\Phi_{th,1\rightarrow 2}$	$V_1 - V_2 = RI_{1\rightarrow 2}$
Résistance	$R_{th} = \dfrac{L}{\lambda S}$	$R = \dfrac{\rho_\mathrm{elec}L}{S} = \dfrac{L}{\sigma S}$
Flux	$\Phi_{th} = \iint_{M\in\mathscr{S}} \vec{j}_\mathrm{Q}(M,t).\overrightarrow{dS}_M$	$I = \iint_{M\in\mathscr{S}} \vec{j}_{elec}(M,t).\overrightarrow{dS}_M$
Lois	$\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$	$\vec{j}_{elec} = -\sigma\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$
Association série	$R_{th,serie} = R_{th,1} + R_{th,2}$	$R_{serie} = R_1 + R_2$
Association parallèle	$\dfrac{1}{R_{th,//}} = \dfrac{1}{R_{th,1}} + \dfrac{1}{R_{th,2}}$	$\dfrac{1}{R_{//}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

IV.3 Un exemple non stationnaire, effet de cave

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. La température au niveau du sol est :

$$T(0) = T_m + a\cos(\omega t)$$

1. Le coefficient de diffusivité thermique du sol étant estimé à $\kappa = 3{\cdot}10^{-7}$ m^2.s^{-1}, on cherche à construire un modèle permettant de déterminer la profondeur à laquelle on doit creuser une cave dans une région où les écarts de température entre le jour et la nuit atteignent 30^oC si l'on veut que les écarts de température dans la cave restent inférieurs à $0,5^o$C.
   (a) Établir l'équation de diffusion thermique en coordonnées cartésiennes.

(b) On cherche des solutions de la forme $T(x,t) = T_m + \theta(x,t)$, quelle équation différentielle régit $\theta(x,t)$?

(c) On utilise alors les notations complexes et on cherche des solutions de la forme $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f}(x)e^{i\omega t}$. En déduire que $\underline{f}$ vérifie :

$$\frac{d^2\underline{f}}{dx^2} - \frac{2i}{\delta^2}\underline{f} = 0$$

Quelle est l'expression de δ ?

(d) Établir l'expression de $\underline{f}(x)$.

(e) Donner l'expression de $T(x,t)$ en fonction de T_m, a, δ et ω.

(f) Quel est le décalage temporel entre les oscillations diurnes de température en surface et dans la cave ?

2. (a) Les écarts saisonniers de température étant de 15^oC en surface, quel est cet écart dans la cave ?

(b) Quel est le décalage temporel entre les oscillations saisonnières de température en surface et dans la cave ?