Diffusion thermique

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ Montrer par un bilan, puis directement à partir de l'équation de conservation, qu'en régime stationnaire et sans terme source, à 1D, le flux à travers toute section S de la barre est conservé : $\Phi_{th}(x) = \Phi_0$.

$\boxed{2}$ Montrer, à partir de l'équation de conservation, qu'en régime stationnaire et sans terme source, le flux à travers toute surface fermée est nul.

$\boxed{3}$ Un artisan verrier chauffe le milieu d'un tube en verre ($D_{th} \simeq 10^{-6}$ m^2.s^{-1}) de longueur 40 cm pour pouvoir y créer un coude. Pendant combien de temps environ peut-il tenir à pleines mains les extrémités du tube sans se brûler ?

$\boxed{4}$ On accole bout à bout 2 tiges de même section, de longueurs ℓ_1 et ℓ_2, de conductivité thermique respectivement λ_1 et λ_2, dont les extrémités sont maintenues respectivement à $T_{1,0}$ et $T_{2,0}$. On suppose l'ensemble isolé thermiquement.
Quelle est la température de la jonction en régime stationnaire ?

$\boxed{5}$ Comparer, en ordre de grandeur, la résistance thermique d'un vitrage simple en verre d'épaisseur e et celle d'un double vitrage constitué de 2 couches de verre d'épaisseur $e/3$ séparées par un espace d'épaisseur $e/3$ rempli d'air.

$\boxed{1}$ cf cours. $\boxed{2}$ Théorème d'Ostrogradski. $\boxed{3}$ $\tau \simeq \dfrac{L^2}{D}$, $\tau \simeq 4.10^4$. $\boxed{4}$ $T_i = \dfrac{\ell_1\lambda_2 T_{2,0} + \ell_2\lambda_1 T_{1,0}}{\ell_2\lambda_1 + \ell_a\lambda_2}$. $\boxed{5}$ $R_{th,D} \simeq 7R_{th,s}$

Exercices

1. Température d'une interface

On considère un mur d'épaisseur $e_1 = 25$ cm. Sur ce mur est appliqué un isolant d'épaisseur $e_2 = 5$ cm. Les conductivités thermiques du mur et de l'isolant sont respectivement $\lambda_1 = 5$ W.m^{-1}.K^{-1} et $\lambda_2 = 0,05$ W.m^{-1}.K^{-1} La température extérieure du mur est $\theta_2 = -10^o$ C ; la température intérieure de la pièce à la surface de l'isolant est $\theta_1 = 20^o$C. Exprimer la température θ_i à l'interface mur-isolant.

2. Vitres d'un wagon

Les vitres d'un wagon ont une épaisseur L, une aire totale S et une conductivité thermique λ. Leur surface extérieure est à la température T_e et leur surface intérieure à la température T_i.
On se placera dans tout l'exercice en régime stationnaire.

1. Établir l'expression du champ de température $T(x)$ au sein de la vitre.
2. On tient compte des transferts conducto-convectifs à l'aide de la loi de Newton qui donne le transfert thermique entre un solide de température de surface T_s et un fluide de température T_f pendant dt :
$$\delta Q = h \cdot S(T_s - T_f)dt$$
On donne T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure. En déduire les températures T_i et T_e. Application numérique.
3. Enfin on tient compte du bilan de rayonnement thermique reçu par la surface extérieure avec une puissance surfacique φ_s.
En déduire les nouvelles valeurs des températures T_i et T_e. Application numérique.
Quelle doit être la puissance thermique de réfrigération du wagon pour maintenir sa température à 20^oC ?

Données : $T_1 = 20^oC$; $T_2 = 35^oC$; $\lambda = 0,10$ S.I. ; $h = 10$ S.I. ; $\varphi_s = 200$ W.m^{-2} ; $L = 1,0$ cm. ; $S = 20$ m^2.

3. Transferts thermiques dans un barreau

On considère un barreau cylindrique métallique de rayon R, de section σ, de longueur L et de conductivité thermique λ. La température à l'extrémité $x = 0$ est T_1. Partout ailleurs, à l'extérieur du cylindre, la température est T_e. La puissance cédée à l'extérieur par l'élément de cylindre de longueur dx et de section σ est

$$dP = h(T(x) - T_e)dx$$

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.
2. Donner l'expression de $T(x)$ dans l'approximation où L est très grand. Préciser la condition de validité de cette approximation.
3. On prend deux barreaux cylindriques de même géométrie, l'un en cuivre (λ_{Cu}), l'autre en étain (λ_{Sn}). On les recouvre de paraffine, qui fond à 60^oC. Sur le barreau de cuivre, la paraffine fond à l'abscisse x_1, et sur celui d'étain, elle fond à l'abscisse x_2. Déterminer (λ_{Sn}).
   Données numériques : (λ_{Cu}) $= 390$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $x_1 = 30,0$ cm ; $x_2 = 12,4$ cm.
4. Calculer la puissance dissipée par deux méthodes différentes.

4. Diffusion thermique en présence d'effet Joule

Un cylindre métallique (de conductivités électrique et thermique γ et λ) de section S et de longueur L est parcouru longitudinalement par un courant d'intensité I. On suppose que les extrémités sont maintenues aux températures T_0 et T_1 et que sa surface latérale est calorifugée.

1. Que vaut la puissance dissipée par effet Joule par unité de volume ?
2. Établir l'équation de la conduction de la chaleur sachant que l'on adopte l'approximation d'un problème unidimensionnel, avec terme source, en régime stationnaire.
3. En déduire la loi d'évolution spatiale de la température en fonction de l'abscisse.
4. Examiner les cas particuliers où $I = 0$, puis $T_0 = T_1$. Tracer les courbes $T(x)$ dans les deux cas et les commenter.
5. Calculer le flux thermique aux deux extrémités et commenter.

5. Étude thermique d'un barreau d'uranium

Un barreau d'uranium servant de "combustible nucléaire" a un diamètre $D = 29$ mm. Ce barreau d'uranium est le siège d'une réaction nucléaire qui dégage une puissance thermique par unité de volume $\mathcal{P} = 700$ MW.m^{-3}. La conductivité thermique de l'uranium est $\lambda = 27$ W.m^{-1}.K^{-1}.

1. La température sur la surface latérale du barreau est maintenue à la valeur $\theta_0 = 200^o$C.
   (a) Déterminer la répartition de température dans le barreau dans l'approximation où le barreau est très long.
   (b) Calculer numériquement la valeur maximale θ_{max} de la température dans le barreau.
2. En fait, l'uranium fond à la température $\theta_f = 1132^o$C. Pour éviter la fusion du barreau, on prend une géométrie différente : le cylindre est creux, de diamètre intérieur $D' = 22$ mm, le diamètre extérieur $D = 29$ mm étant conservé.
   (a) Déterminer la répartition de température dans le barreau.
   (b) Calculer numériquement la valeur maximale θ'_{max} de la température dans le barreau. Conclure.

6. Création d'entropie dans un solide indilatable

Dans un milieu de température non homogène, on définit un vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique, dont le flux à travers une surface quelconque est égal au transfert thermique à travers cette surface par unité de temps.
On note λ le coefficient de conductivité thermique du matériau, que l'on suppose indépendant de la température, et uniforme dans tout le solide.

1. (a) Montrer par un bilan énergétique que
$$\mathrm{div}\,\vec{j}_Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$
   (b) En déduire que si $\vec{j}_Q$ obéit à la loi de Fourier, T est solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on établira.
2. (a) Exprimer la variation d'entropie de l'élément de volume $d\tau$ pendant l'intervalle de temps dt.
   (b) Intégrer cette expression sur tout le volume du solide ; en identifiant à l'expression $dS = \delta_i S + \dfrac{\delta Q}{T}$, calculer l'entropie créée pendant l'intervalle de temps $[t, t+dt]$ dans tout le solide.
   (c) En déduire l'entropie σ_S créée par unité de volume et par unité de temps.

On donne : $S(T,V) = S(T_0, V_0) + C \ln\left(\dfrac{T}{T_0}\right)$

7. Diffusion thermique et mammifères marins

On considère un mammifère marin modélisé par une sphère de rayon R plongée dans l'eau. Ses cellules sont le siège de réactions exothermiques qui produisent une puissance volumique p_V. Ceci produit une puissance totale $\mathcal{P}$ qui maintient le mammifère à température constante. On note λ la conductivité thermique de l'eau (pour $r > R$) et T_0 la température dans l'eau, à l'infini. On se place en régime stationnaire.

1. Déterminer l'expression de la puissance totale $\mathcal{P}$ dégagé par le mammifère en fonction de p_V et R.
2. Établir l'expression du vecteur densité de courant thermique en $r > R$ en fonction de p_V, r et R.
3. Déterminer l'expression de la température $T(r)$ à une distance r du centre du mammifère, en fonction de T_0, λ et $\mathcal{P}$. En déduire la température cutanée T_c de l'animal en $r = R$.
4. Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ en fonction de T_c, T_0, λ et R.
5. Quelle doit être la valeur de $\mathcal{P}$ pour avoir $T_c = 30$°C avec $R = 25$ cm.
6. Expliquer pourquoi il ne peut pas exister de petit mammifère marin dans l'eau. Ce raisonnement est-il valable sur Terre ?

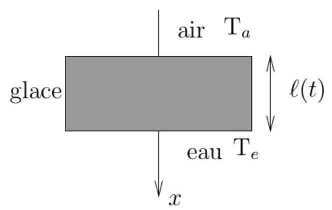
Données : $\lambda_{\text{air}} = 0,003$ W.K^{-1}.m^{-1} ; $\lambda_{\text{eau}} = 5,0 \cdot 10^{-1}$ W.K^{-1}.m^{-1} ; $T_0 = 10$°C.

8. Lac gelé

L'eau liquide d'un lac est à la température de congélation $T_e = 273$ K. L'air au dessus du lac est à température constante $T_a = 263$ K. Sans glace à $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche d'épaisseur $\ell(t)$. La glace possède une masse volumique μ, une conductivité thermique λ, une chaleur latente de fusion massique L_f et une capacité thermique négligeable. La puissance thermique échangée à l'interface air-glace par unité de surface est

$$P_{th} = h(T_0(t) - T_a)$$

où $T_0(t)$ est la température de la glace au voisinage de l'air.



1. Déterminer la distribution de température $T(x,t)$ dans la glace en fonction de $T_0(t)$, T_e, $\ell(t)$ et x.
2. Déterminer deux expressions du flux thermique traversant la couche de glace en fonction de $\ell(t)$, $T_0(t)$, T_a et T_e.
3. Établir deux relations entre $\ell(t)$ et $T_0(t)$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\ell(t)$.
   On posera $\ell_0 = \dfrac{\lambda}{h}$ et $\tau = \dfrac{\lambda \mu L_f}{2h^2(T_e - T_a)}$

4. Déterminer $\ell(t)$ et $T_0(t)$. Donner les valeurs numériques de ℓ_0, τ et $\dfrac{d\ell}{dt}$.
5. Comment évolue la température à la surface du lac ?

Données : $\mu = 0,90 \cdot 10^3$ kg·m^{-3}, $\lambda = 2,1$ W·m^{-1}·K^{-1}, $L_f = 334$ kJ·kg^{-1} et $h = 42$ W·m^{-2}·K^{-1}.

9. Estimation de l'âge de la Terre par Lord Kelvin

On néglige la sphéricité de la planète et on admet que le seul mécanisme énergétique dans le sol est le transfert thermique diffusif. On admet que la température ne dépend que de la profondeur z comptée positivement et du temps t.

On prendra les valeurs numériques suivantes
— masse volumique $\rho = 2,8.10^3$ kg.m^{-3}
— capacité thermique massique $c_p = 1.10^3$ J.K^{-1}.kg^{-1}
— conductivité thermique $\lambda = 4$ W.K^{-1}.m^{-1}

1. Montrer que la température est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où D est une constante dont on précisera la valeur numérique et l'unité.

2. Soit j_Q la densité de courant thermique (ou densité de flux thermique) ; établir l'équation aux dérivées partielles dont elle est solution.

3. Au milieu du XIXième siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément, sa surface a été soumise à une température T_S. Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers $+\infty$? Quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers $+\infty$?

4. La solution proposée par Lord Kelvin :

$$j_Q(z,t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}}\exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right),$$

où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre est-elle satisfaisante ? Représenter graphiquement la valeur absolue de la densité de flux thermique, en fonction de la profondeur pour deux dates différentes.

5. Les paramètres du problème sont $T_0 - T_S, \lambda, \rho$ et c_p. On suppose que

$$A = a(T_0 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c_p^\delta$$

où a, α, β, γ et δ sont des constantes sans dimensions. Calculer α, β, γ et δ par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord Kelvin.

6. Par un raisonnement que l'on ne cherchera pas à reproduire, on peut montrer que $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre.

7. Lord Kelvin a admis que $T_0 - T_S$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K ; l'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquant un gradient thermique proche de 30 K.km^{-1}, quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?

8. Que pensez vous de cette estimation ?

Résolution de problème

1. Survie en igloo

Quelle épaisseur e faut-il donner à un igloo pour survivre à l'intérieur ?

Données :

- $D = 4$ m diamètre intérieur de l'igloo,
- par son métabolisme, un être humain dégage une puissance de $P_0 = 50$ W,
- bien couvert, il survit à $T_{int} = 10^o$C,
- dehors, il fait $T_{ext} = -20^o$C,
- la conductivité thermique de la glace est $\lambda = 0,05$ W.K^{-1}.m^{-1}.

Laplacien d'un champ scalaire en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

2. Cuisson des œufs

La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure environ 3 minutes. Un œuf moyen a une masse comprise entre 53 g et 63 g.
Quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, de masse comprise entre 1,2 kg et 1,8 kg ?