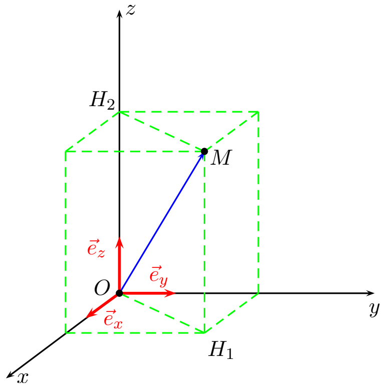
Cinématique du point

I - Les différents repères utilisés

1. Le repère cartésien



Le repère cartésien : $(O; \vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$

Les coordonnées du point M : (x, y, z)

Coordonnées : $\begin{cases} x \in \left]-\infty; +\infty\right[\\ y \in \left]-\infty; +\infty\right[\\ z \in \left]-\infty; +\infty\right[\end{cases}$

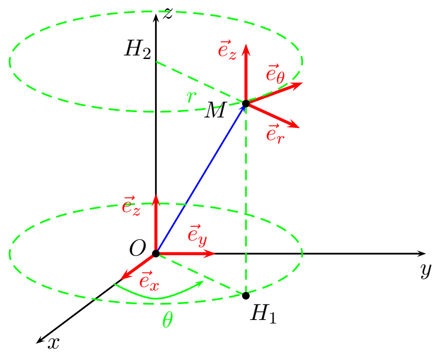
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v}(M) = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$

Vecteur accélération : $\overrightarrow{a}(M) = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$

2. Repère cylindrique



Le repère cylindrique : $(O; \vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_z)$

Les coordonnées du point M : (r, θ, z)

Coordonnées : $\begin{cases} r \in \left[0; +\infty\right[\\ \theta \in [0; 2\pi] \\ z \in \left]-\infty; +\infty\right[\end{cases}$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$

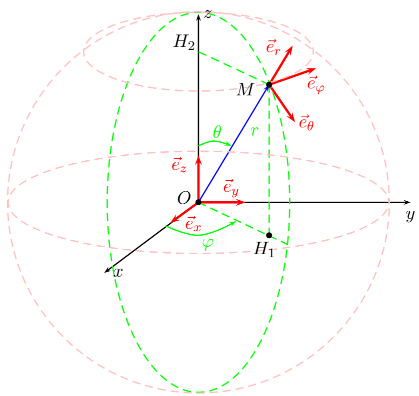
Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v}(M) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$

Vecteur accélération : $\overrightarrow{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$

Remarques :

- Pour un mouvement plan on utilise les coordonnées polaires alors $z = 0$.
- On a $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$.

3. Repère sphérique



Le repère cylindrique : $(O; \vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_\varphi)$

Les coordonnées du point M : (r, θ, φ)

Coordonnées : $\begin{cases} r \in \left[0; +\infty\right[\\ \theta \in [0; \pi] \\ \varphi \in \left[0; 2\pi\right[\end{cases}$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v}(M) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

II - Vitesse, accélération, trajectoire

1. Vitesse d'un point

$$\boxed{\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}}$$

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ est tangent à la trajectoire de M et dans le sens du mouvement.

2. Accélération d'un point

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}}$$

Le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ est dirigé vers la concavité de la trajectoire de M.

— $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v} > 0$: mouvement accéléré
— $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v} < 0$: mouvement décéléré
— $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v} = 0$: mouvement uniforme

Ce dernier cas se produit, soit pour une accélération nulle (cas du mouvement rectiligne uniforme), soit pour un accélération normale à la vitesse.

3. Mouvement plan et base de Frenet

Dans le cas d'une trajectoire plane on peut repérer le point matériel par son abscisse curviligne s qui correspond à la distance parcourue sur la trajectoire. On définit une base locale $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ appelée base de Frenet. $\overrightarrow{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et dirigé dans le sens du mouvement. $\overrightarrow{N}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{T}$, dans le plan de la trajectoire et vers l'intérieur de la concavité.

On a alors :

$$\overrightarrow{v}(t) = v(t)\overrightarrow{T}$$

et

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\overrightarrow{T} + \frac{v^2(t)}{R(t)}\overrightarrow{N}$$

où $R(t)$ est le rayon de courbure de la trajectoire au point M, c'est-à-dire le rayon du cercle qui épouse le mieux la forme de la trajectoire au point M (cercle osculateur).

III - Mouvements usuels

1. Mouvement rectiligne uniforme

La trajectroire est une droite. Le problème se réduit à un seul paramètre de position (par exemple x). L'accélération est nulle $\vec{a} = \vec{0}$.

On a $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = v_0 \\ x = v_0 t + x_0 \end{cases}$

2. Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Toujours avec un paramètre de position unique x (la trajectoire est une droite), mais cette fois l'accélération est constante $\vec{a} = a_0\vec{e}_x$.

On a $\begin{cases} \ddot{x} = a_0 \\ \dot{x} = a_0 t + v_0 \\ x = \dfrac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$

On peut établir la relation entre position et vitesse en éliminant le temps, ce qui donne l'équation paramétrique de la trajectoire de phase $v(x)$:

$$v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0)$$

3. Mouvement à accélération constante

Si la vitesse initiale n'est pas colinéaire à l'accélération, on a un mouvement parabolique dans le plan défini par $(M_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0)$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = a_0 t + v_{0z} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_{0x} t + x_0 \\ y = y_0 \\ z = \dfrac{1}{2} a_0 t^2 + v_{0z} t + z_0 \end{cases}$$

4. Mouvement rectiligne sinusoïdal

On a $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où x_m est l'amplitude, ω_0 la pulsation et φ la phase à l'origine.

L'équation paramétrique de la trajectoire de phase s'écrit dans ce cas :

$$\left(\frac{v}{\omega_0 x_m}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_m}\right)^2 = 1$$

5. Mouvement circulaire uniforme

La trajectoire est un cercle. On travaille en coordonnées polaires dans le plan xOy, avec le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

On rappelle que les vecteurs de la base polaire sont mobiles et que leur dérivée temporelle n'est pas nulle :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right) = \dot{\theta}\, \vec{e}_\theta \qquad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right) = -\dot{\theta}\, \vec{e}_r}$$

Pour un mouvement circulaire $r(t) = R = cte$. Comme $\dot{r} = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R\vec{e}_r \\ \vec{v}(M) &= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{a}(M) &= -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

On introduit la notion de **vitesse angulaire** : $\boxed{\omega = \dot{\theta}}$.

Le mouvement uniforme est caractérisé par $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$, ce qui impose ici $a_\theta = 0$ soit $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$: la vitesse angulaire est constante pour un mouvement uniforme, et on retient les expressions simplifiées des vecteurs position, vitesse et accélération :

Mouvement circulaire uniforme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R\vec{e}_r \\ \vec{v}(M) &= R\omega\vec{e}_\theta \\ \vec{a}(M) &= -R\omega^2\vec{e}_r \end{aligned}$$

L'accélération est radiale et centripète (dirigée vers O)

6. Mouvement circulaire non uniforme

Pour un mouvement circulaire non uniforme, il y a une accélération orthoradiale :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R\vec{e}_r \\ \vec{v}(M) &= R\omega\vec{e}_\theta \\ \vec{a}(M) &= -R\omega^2\vec{e}_r + R\dot{\omega}\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

On peut remarquer que $a_r = -\dfrac{v^2}{R}$ et $a_\theta = \dfrac{dv}{dt}$.

Mouvement circulaire quelconque :

$$\vec{a}(M) = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$$

Cette remarque se généralise à un mouvement quelconque, la composante de l'accélération parallèle à la vitesse $a_\parallel$ caractérise la variation de la norme de $\vec{v}$ et la composante de l'accélération perpendiculaire à la vitesse $a_\perp$ renseigne sur la courbure de la trajectoire, elle est dirigée vers le centre de courbure.

Dynamique du point

I - Éléments cinétiques

1. Masse

La masse inertielle caractérise la capacité d'un corps à s'opposer à une modification de sa vitesse. C'est une grandeur additive, indépendante du référentiel d'étude.
Elle s'exprimer en kg.
Dimension : $[m] = \mathrm{M}$

2. La quantité de mouvement

Pour un point matériel M (masse inertielle m) en mouvement dans un référentiel $\mathscr{R}$ à la vitesse $\vec{v}$, la **quantité de mouvement** $\vec{p}$ est définie par :

$$\boxed{\vec{p}(M/\mathscr{R}) = m\,\vec{v}(M/\mathscr{R})}$$

3. Énergie cinétique

L'**énergie cinétique**, notée E_c, d'un point matériel M (de masse m) en mouvement dans un référentiel $\mathscr{R}$ à la vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$\boxed{E_c(M/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}mv^2(M/\mathscr{R})}$$

4. Moment cinétique

Le **moment cinétique** d'un point matériel M en A point de l'espace dans le référentiel d'étude $\mathscr{R}$ est défini par :

$$\boxed{\vec{L}_A(M/\mathscr{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathscr{R})}$$

avec $\vec{p}(M/\mathscr{R})$ vecteur quantité de mouvement de M.

II - Les trois lois de Newton

1. Le principe d'inertie

Un point matériel est dit **isolé** lorsqu'il n'est soumis à aucune action, ou **pseudo-isolé** lorsque la somme de ses actions est nulle.

> Principe d'inertie : Il existe une classe de référentiels privilégiés appelés **référentiels galiléens** dans lesquels tout **point matériel isolé** est animé d'un **mouvement rectiligne et uniforme**.

Conséquence : quand on veut étudier le mouvement d'un point, tous les référentiels ne sont pas équivalents.

Propriété : si $\mathscr{R}_0$ est un référentiel galiléen alors tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}_0$ est également galiléen.

En pratique, un référentiel est considéré comme galiléen tant que le mouvement étudié ne met pas cette propriété en défaut.

Le référentiel du laboratoire (ou référentiel terrestre) est galiléen pour des durées négligeables devant la période de rotation propre de la Terre (1 jour).

Le référentiel géocentrique (origine : centre de la Terre ; axes : pointant vers 3 étoiles lointaines) est galiléen pour des durées courtes devant la rotation de la Terre autour du Soleil (1 an).

2. Le principe fondamental de la dynamique

On considère un système de masse m. Ce système peut être un point matériel M, un ensemble de points, un solide...

Principe fondamentale de la dynamique : Dans un **référentiel galiléen** $\mathscr{R}_g$, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme des **forces extérieures** s'exerçant sur le système :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(M/\mathscr{R}_g)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{f_i}$$

$\sum\limits_i \vec{f}_i = \vec{F}$ est la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le système.

Cas d'un système de masse constante : dans ce cas on peut sortir la masse m de la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$ est l'accélération du point matériel M ou du centre de masse G du système étudié.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Cas d'un système à l'équilibre : un système à l'équilibre dans un référentiel donné a une quantité de mouvement nulle : $\vec{p} = \vec{0}$. Si l'équilibre se produit dans un référentiel galiléen alors

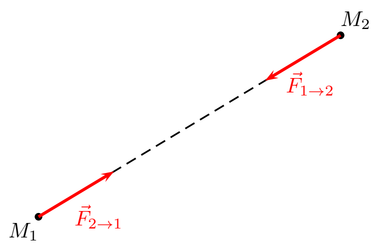
$$\sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$$

3. Principe des actions réciproques

Soient deux points matériels M_1 et M_2 en interaction.

Les forces d'interaction réciproques qui s'exercent entre deux points matériels sont opposées et ont pour support la droite joignant ces points.

$$\overrightarrow{F}_{2\to1} = -\overrightarrow{F}_{1\to2}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{F}_{2\to1} = \overrightarrow{0}$$



4. Les limites à la mécanique classique

Hypothèse implicites :
- Temps absolu (indépendant de l'observateur ou référentiel)
- Espace euclidien
- Comportement déterministe

La mécanique classique donne d'excellents résultats tant que la vitesse n'est pas trop grande ($v \ll c$), on ne s'approche d'objet trop massique et que les corps étudiés ne sont pas trop petits ($\ell \gg \lambda_{DB}$).

III - Forces usuelles

Dans les forces usuelles, on distingue les interactions :

à distance	interaction gravitationnelle entre masses interaction électrostatique entre charges interactions nucléaires entre protons et neutrons d'un noyau atomique (forte et faible)
de contact	tension d'un ressort ou d'un fil réaction d'un support, frottement de glissement frottements fluides (visqueux) forces pressantes exercées par un fluide

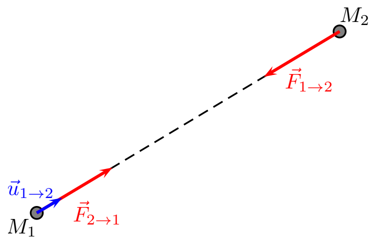
1. Interaction gravitationnelle

Force d'interaction entre deux points matériels M_1 (masse m_1) et M_2 (masse m_2)

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1\to2} = -\frac{\mathscr{G} m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{1\to2}}$$

avec $r = M_1M_2 = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ et $\overrightarrow{u}_{1\to2} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}$

$\mathscr{G}$ est la constante de gravitation :
$\mathscr{G} = 6,67\cdot 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}.



2. Le poids

Un système de masse m situé à la surface de la Terre subit son poids $\vec{P}$, exercé par la Terre,

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}}$$

$\overrightarrow{g}$ est le champ de pesanteur terrestre, dirigé vers le centre de la Terre et de norme $g = \dfrac{\mathscr{G} M_T}{R_T^2}$.

Le poids s'applique au centre de masse G du système étudié.

$\triangle$ Le poids est la force de gravitation exprimée dans un cas particulier.

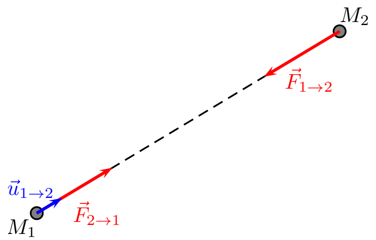
3. L'interaction électrostatique

Force d'interaction entre deux particules chargées M_1 (charge q_1) et M_2 (charge q_2)

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1\to2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_{1\to2}}$$

avec $r = M_1M_2 = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ et $\overrightarrow{u}_{1\to2} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}$

ϵ_0 est la permittivité du vide. $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\cdot 10^9$ S.I.



La force de Coulomb est attractive si q_1 et q_2 sont de signes opposées, et elle est répulsive si elles sont de même signe.

4. La force de Lorentz

Une particule P de charge q en mouvement dans un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E};\overrightarrow{B})$ subit la force de Lorentz :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathscr{L}} = q\left(\overrightarrow{E} + \vec{v}\wedge\overrightarrow{B}\right)}$$

5. Action d'un ressort

La force de rappel élastique exercée par un ressort est, dans un certain domaine d'allongement, proportionnelle à celui-ci :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{élast}} = -k(\ell-\ell_0)\vec{e}_{\text{ext}}}$$

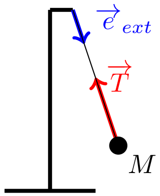
avec k constante de raideur du ressort (en N.m^{-1}) et $\vec{e}_{\text{ext}}$ vecteur unitaire dirigé vers "l'extérieur" du ressort (dans le sens de son allongement). ℓ est la longueur du ressort à l'instant considéré, ℓ_0 est la longueur à vide du ressort. $\ell-\ell_0$ est l'allongement du ressort, c'est une grandeur algébrique.

6. Action d'un fil inextensible

Un fil **inextensible tendu** exerce une action de force qui assure le contact entre le fil et le point matériel qui y est accroché. Cette force a les caractéristiques suivantes :

- direction : celle du fil tendu
- sens : celui dirigé vers le point d'attache du fil
- norme : une valeur qui s'adapte aux autres forces et au mouvement
- tension nulle lorsque le fil n'est plus tendu

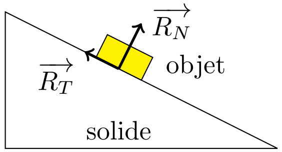
On a $\boxed{\overrightarrow{T} = -T\vec{e}_{ext},}$ avec $T > 0$.



7. Contact entre deux solides

Lorsqu'un objet est posé sur un solide, ce dernier exerce une action sur l'objet, caractérisé par une composante normale à la surface de contact : $\overrightarrow{R}_N$ et une composante tangentielle : $\overrightarrow{R}_T$.

— $\overrightarrow{R}_N$ assure la non interpénétrabilité des deux solides, sa norme s'adapte aux autres forces s'exerçant sur le solide pour assurer le contact. Ce dernier est rompu lorsque $R_N = 0$
— $\overrightarrow{R}_T$ s'oppose au mouvement et caractérise les frottements solides. En l'absence de frottements $R_T = 0$.



Les deux composantes $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, et elles dépendent du mouvement relatif entre le solide et le support. Les lois qui les relient sont appelées **lois de Coulomb du contact solide** :

- s'**il y a glissement** des solides l'un sur l'autre, alors leurs normes sont proportionnelles :

$$\boxed{\|\overrightarrow{R_T}\| = \mu_d \|\overrightarrow{R_N}\|}$$

où μ_d est un coefficient phénoménologique, dépendant notamment des matériaux et de leur état de surface, appelé **coefficient de frottement dynamique**.

- s'**il n'y a pas de glissement**, alors leurs normes vérifient l'inégalité :

$$\boxed{\|\overrightarrow{R_T}\| \leq \mu_s \|\overrightarrow{R_N}\|}$$

où μ_s est un coefficient phénoménologique, dépendant notamment des matériaux et de leur état de surface, appelé **coefficient de frottement statique**.

On constate que la liaison est mieux connue dans le cas du non-glissement (la vitesse de glissement y est nulle, alors qu'elle est quelconque dans le cas du glissement) mais que la force de contact est en contrepartie moins bien connue (inégalité sur les normes contre une égalité dans le cas du glissement).

8. Actions d'un fluide sur un solide

Un solide au repos dans un fluide subit de la part de celui-ci des forces pressantes, dont la résultante est la **poussée d'Archimède** :

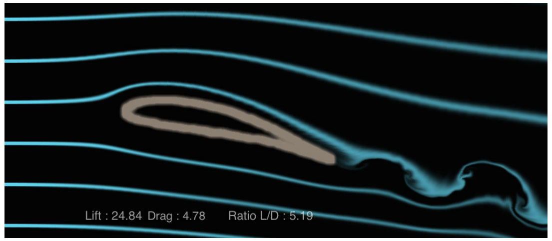
$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{déplacé}} \overrightarrow{g}}$$

Si le solide est en mouvement relatif par rapport au fluide, à cette force d'Archimède s'ajoutent d'autres actions :

— la **force de trainée**, qui s'oppose à la vitesse relative du solide (frottements fluides), qui s'écrit

$$\overrightarrow{F}_T = -k_1 \overrightarrow{v} \qquad \text{à faible vitesse}$$
$$\overrightarrow{F}_T = -k_2 \|\overrightarrow{v}\| \overrightarrow{v} \qquad \text{à grande vitesse}$$

— la **force de portance**, perpendiculaire à la direction de la vitesse relative, qui permet aux avions de voler.



Oscillateurs

I - Oscillateur harmonique à une dimension

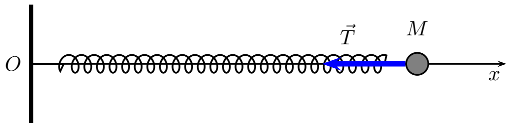
1. Définition et exemple

On appelle **oscillateur harmonique** tout système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = \omega_0^2 X_{eq}$$

quelle que soit la nature physique de la variable x.
ω_0 est la pulsation propre du système.

Exemple : le ressort horizontal



On étudie le mouvement du point matériel M dans le référentiel terrestre galiléen. Il est soumis à $\vec{P} = m\vec{g}$ son poids, $\vec{R}$ l'action de la tige qui guide le mouvement (perpendiculaire à la tige car pas de frottement) et $\vec{T}$ l'action du ressort. $\vec{T}$ est de la forme :

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}$$

avec ℓ la longueur du ressort, ℓ_0 la longueur à vide du ressort, k la raideur du ressort et $\vec{i}$ la vecteur unitaire qui va de O vers M.
On utilise le repère cartésien $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le mouvement étant selon la tige, M a pour coordonnées $(x,0,0)$ et la vecteur position à pour expression :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

On constate que $\ell = x$.

D'après la deuxième loi du Newton, on a $\dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$. Par projection sur l'axe des x on obtient :

$$m\ddot{x} + kx = k\ell_0$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et de position à l'équilibre $X_{eq} = \ell_0$.

2. Propriétés du mouvement

Les solutions de cette équation différentielle sont la somme d'une solution particulière (car second membre) $x_p(t) = X_{eq}$ et l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée :

$$\ddot{x}_h + \omega_0^2\, x_h = 0$$

Soit, $x_h(t) = X_m \cos(\omega_0\, t + \varphi)$ ou $x_h(t) = A\cos(\omega_0\, t) + B\sin(\omega_0\, t)$.

D'où

$$x(t) = X_{eq} + X_m \cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$\text{ou } x(t) = X_{eq} + A\cos(\omega_0\, t) + B\sin(\omega_0\, t)$$

Les constantes X_m, φ, A et B sont déterminées par les conditions initiales. On choisit la forme :

$$x(t) = X_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

D'où

$$\dot{x}(t) = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = v(t)$$

Si $x(0) = x_0 + X_{eq}$ (x_0 est l'écart à la position d'équilibre à $t = 0$) et $v(0) = v_0$ alors

$$\begin{cases} X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \tan\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega_0 x_0} \end{cases}$$

La période du mouvement $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ est indépendante des conditions initiales ; c'est une propriété importante de l'oscillateur harmonique appelée **isochronisme** des oscillations.

Remarque : à la position d'équilibre, la vitesse est extrémale ($v_m = \pm X_m\omega_0$) et aux deux extrémités ($x = X_{eq} \pm X_m$) la vitesse est nulle.

3. Aspect énergétique

Soit E_m l'énergie mécanique du point matériel, par définition elle est égale à la somme de son énergie cinétique ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$) et de son énergie potentielle (ici $E_p = E_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - X_{eq})^2$ car le poids et l'action de la tige ne travaillent pas).

Propriété : L'énergie potentielle associée à un OH est un **puits de potentiel parabolique**.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kX_m^2$$

Propriété : l'énergie mécanique d'un OH est **constante** et est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations. Au cours du mouvement il y a échange périodique entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle (période $\frac{T_0}{2}$).

Calculons la valeur moyenne de E_p

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_p(t)dt = \frac{kX_m^2}{2}\langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\rangle = \frac{kX_m^2}{4}$$

de même

$$\langle E_c \rangle = \frac{kX_m^2}{4}$$

Pendant le mouvement, il y a **équipartition**, en moyenne, des formes cinétique et potentielle de l'énergie.

$$\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{E_m}{2}$$

II - L'oscillateur libre amorti

1. Mise en équation

Pour prendre en compte l'amortissement des oscillations, on ajoute à l'exemple précédent (ressort horizontal) une force de frottement proportionnelle à la vitesse :

$$\overrightarrow{F} = -h\overrightarrow{v}$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = kX_{eq}$$

Par la suite x sera l'écart à la position d'équilibre et par conséquent $X_{eq} = 0$.

2. Forme canonique

L'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre de l'oscillateur (pulsation de l'oscillateur en l'absence de frottement) et $Q = \frac{1}{h}\sqrt{km}$ le facteur de qualité.

3. Analogie électromécanique

Les deux systèmes (ressort horizontal avec frottement fluide et circuit série RLC) sont régis par les mêmes équations. On peut donc faire une analogie entre les deux :

Électricité	Mécanique
q charge du condensateur	x écart à la position d'équilibre
$i = \dot{q}$ intensité du courant	$v = \dot{x}$ vitesse du point matériel
L inductance de la bobine	m masse du point
$\dfrac{1}{C}$ inverse de la capacité	k raideur du ressort
R résistance du résistor	h coefficient de frottement
$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	$Q = \dfrac{1}{h}\sqrt{km}$
$E_L = \dfrac{1}{2}Li^2$ énergie magnétique	$E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ énergie cinétique
$E_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ énergie électrique	$E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ énergie potentielle

4. Résolution

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

On note Δ le discriminant de cette équation ; $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$.

Suivant le signe de Δ les racines de l'équation caractéristique sont réelles ou complexes conjuguées et on observe différents types de régimes.

a Le régime pseudo-périodique

Pour un régime pseudo-périodique, le discriminant est négatif (ou $Q > 1/2$) et les racines de l'équation caractéristique associée sont complexes et conjuguées :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Les solutions $x(t)$ sont de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

avec Ω **pseudo-pulsation** :

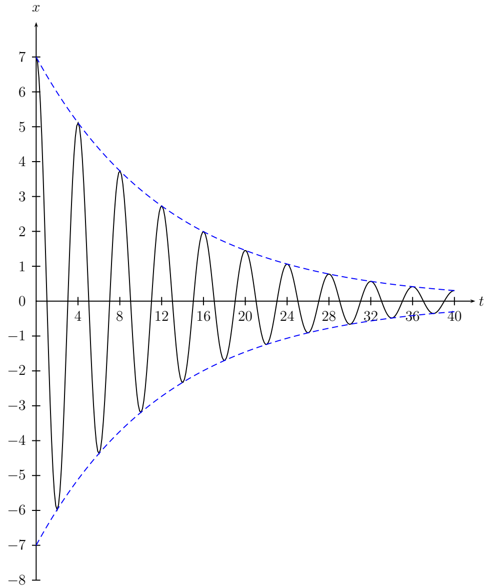
$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}},$$

et A et B deux constantes d'intégration déterminées grâce aux conditions initiales ($x(0)$ et $\dot{x}(0)$).

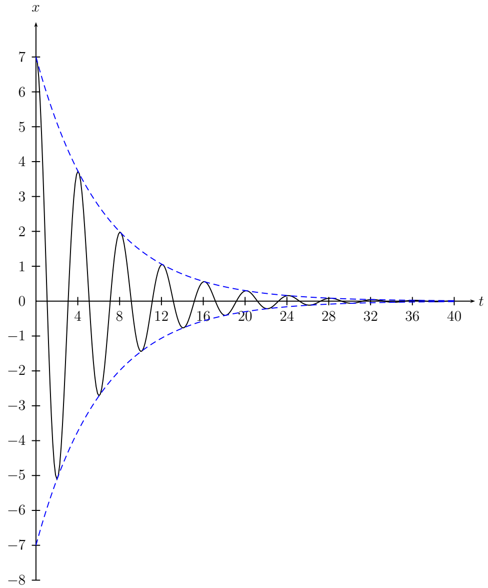
En prenant comme conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient :

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin(\Omega t)\right].$$

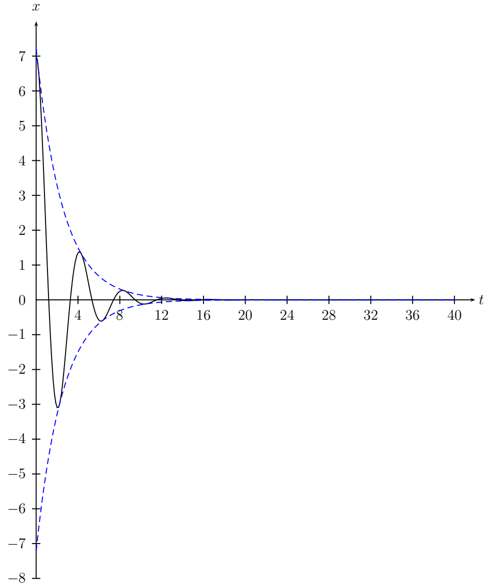
Cas où $Q = 10$ et $T_0 = 4$ s :



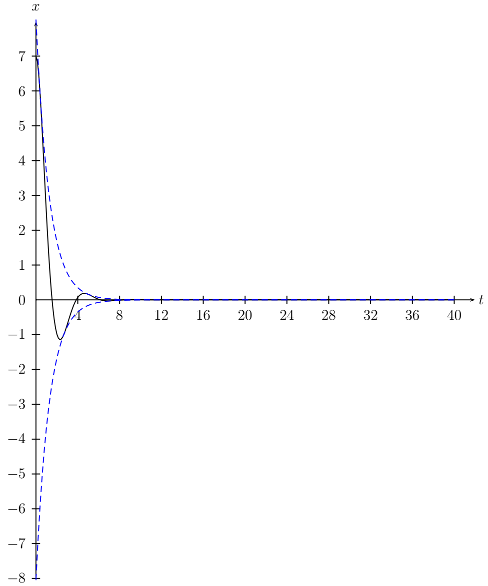
Cas où $Q = 5$ et $T_0 = 4$ s :



Cas où $Q = 2$ et $T_0 = 4$ s :



Cas où $Q = 1$ et $T_0 = 4$ s :



Interprétation qualitative du facteur de qualité : le nombre d'oscillations observées.

b Le régime apériodique

Le régime apériodique correspond à un discriminant positif ($Q < 1/2$) ; les racines de l'équation caractéristique associée sont réelles négatives :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}.$$

Les solutions $x(t)$ sont de la forme :

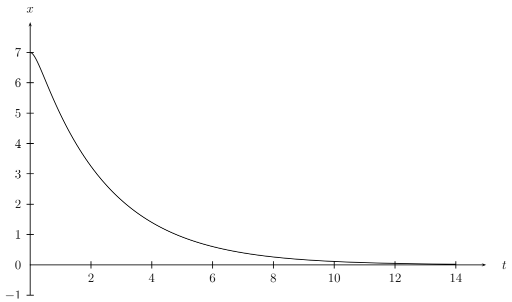
$$x(t) = Ae^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q}+\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}\right)t} + Be^{-\left(\frac{\omega_0}{2Q}+\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}\right)t}.$$

En prenant comme conditions initiales :

$x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient :

$$x(t) = \frac{x_0}{r_1 - r_2}\left[-r_2 e^{r_1 t} + r_1 e^{r_2 t}\right],$$

$$x(t) = \frac{Q x_0}{\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}\left[-r_2 e^{r_1 t} + r_1 e^{r_2 t}\right].$$



$Q = 0,25$ et $T_0 = 4$ s.

c Le régime critique

Le régime critique sépare le régime pseudo-périodique du régime apériodique, il correspond à un discriminant nul ($Q = 1/2$). L'équation caractéristique associée comporte une racine double :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

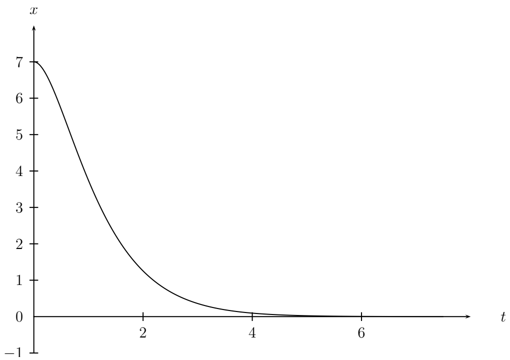
Les solutions $x(t)$ sont de la forme :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

En prenant comme conditions initiales :

$x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient :

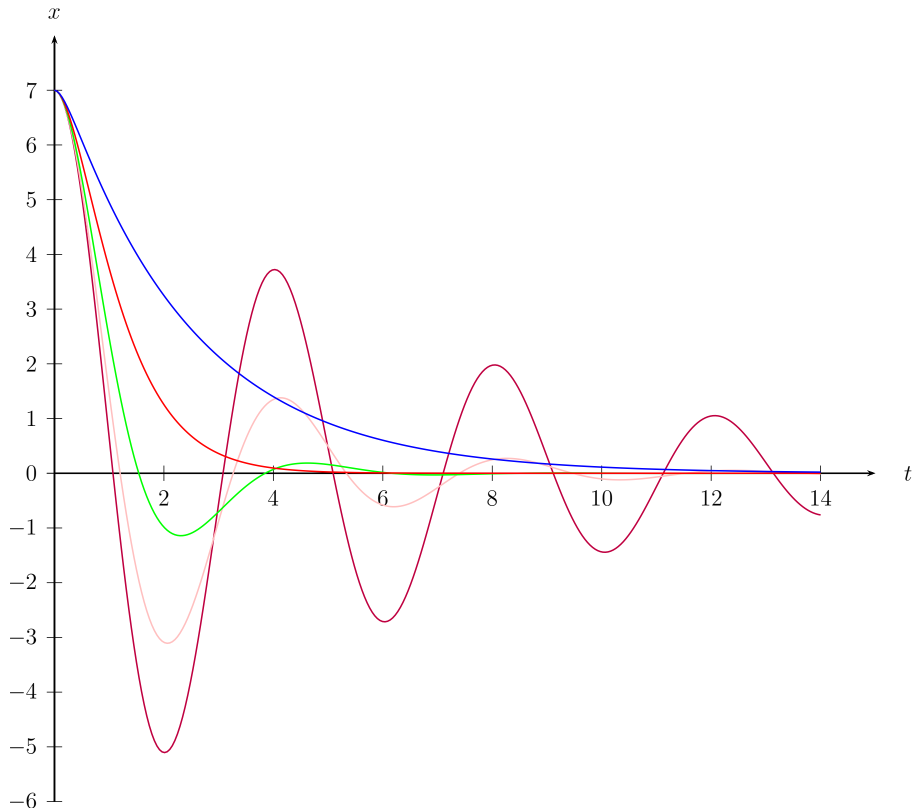
$$x(t) = x_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$



$Q = 0,5$ et $T_0 = 4$ s.

5. Comparaison des différents régimes

a $x(t)$ pour différentes valeurs de Q



$Q = 5$; $Q = 2$; $Q = 1$; $Q = 0,5$; $Q = 0,25$

Remarques : La pseudo-période dépend de la valeur du facteur de qualité. Plus le facteur de qualité est grand, plus elle est petite. Elle tend vers la période propre pour de grands facteurs de qualités (très faible amortissement).

Le cas critique correspond au retour "la plus rapide" à l'équilibre.

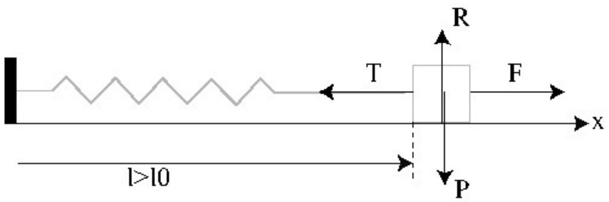
III - Oscillateurs forcés

On considère un oscillateur mécanique amorti. L'amortissement des oscillations est lié à la diminution de l'énergie mécanique du point matériel dissipée par le travail de la force de frottement. Pour conserver les oscillations, il faut compenser cette perte d'énergie grâce au travail d'une force extérieure notée $F(t)$.
On soumet un oscillateur amorti à une force extérieure $\vec{F}$ et on étudie la réponse de l'oscillateur, en particulier lorsque la force excitatrice est une fonction sinusoïdale du temps.

1. Exemple

On étudie le mouvement d'un point matériel M, à un degré de liberté, régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F(t).$$



x est alors l'écart à la position d'équilibre.

Nous pouvons mettre l'équation du mouvement sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ pulsation propre du système et $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{h}$ facteur de qualité de l'oscillateur.

2. Régime transitoire

La solution est la somme :

$$x = x_{(h)} + x_{(p)}$$

$x_{(h)}$, solution homogène, est solution de

$$\ddot{x}_{(h)} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_{(h)} + \omega_0^2 x_{(h)} = 0$$

La solution de cette équation différentielle tend vers 0 au bout de quelques $\tau = \dfrac{Q}{\omega_0}$
$x_{(p)}$, solution particulière, est de la forme

$$x_{(p)} = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La solution particulière oscille avec la même pulsation que l'excitation. On parle de **régime transitoire** tant que $x_{(h)}$ n'est pas négligeable devant $x_{(p)}$.

3. Régime sinusoïdal forcé - Utilisation des complexes

On parle de **régime sinusoïdal forcé** lorsque $x_{(h)}$ devient négligeable devant $x_{(p)}$

$$x = x_{(h)} + x_{(p)} \simeq x_{(p)}$$

On travaille alors avec les grandeurs complexes

$$\underline{x}(t) = X_m \exp\left(j(\omega t + \varphi)\right) = \underline{X}_m \exp(j\omega t)$$

avec $\underline{X}_m = X_m \exp(j\varphi)$

$\underline{x}$ est solution de

$$\underline{\ddot{x}} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F_0}{m}\exp(j\omega t)$$

qui devient avec les amplitudes complexes

$$(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}j\omega + \omega_0^2)\underline{X}_m = \frac{F_0}{m}$$

$$\underline{X}_m = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}}$$

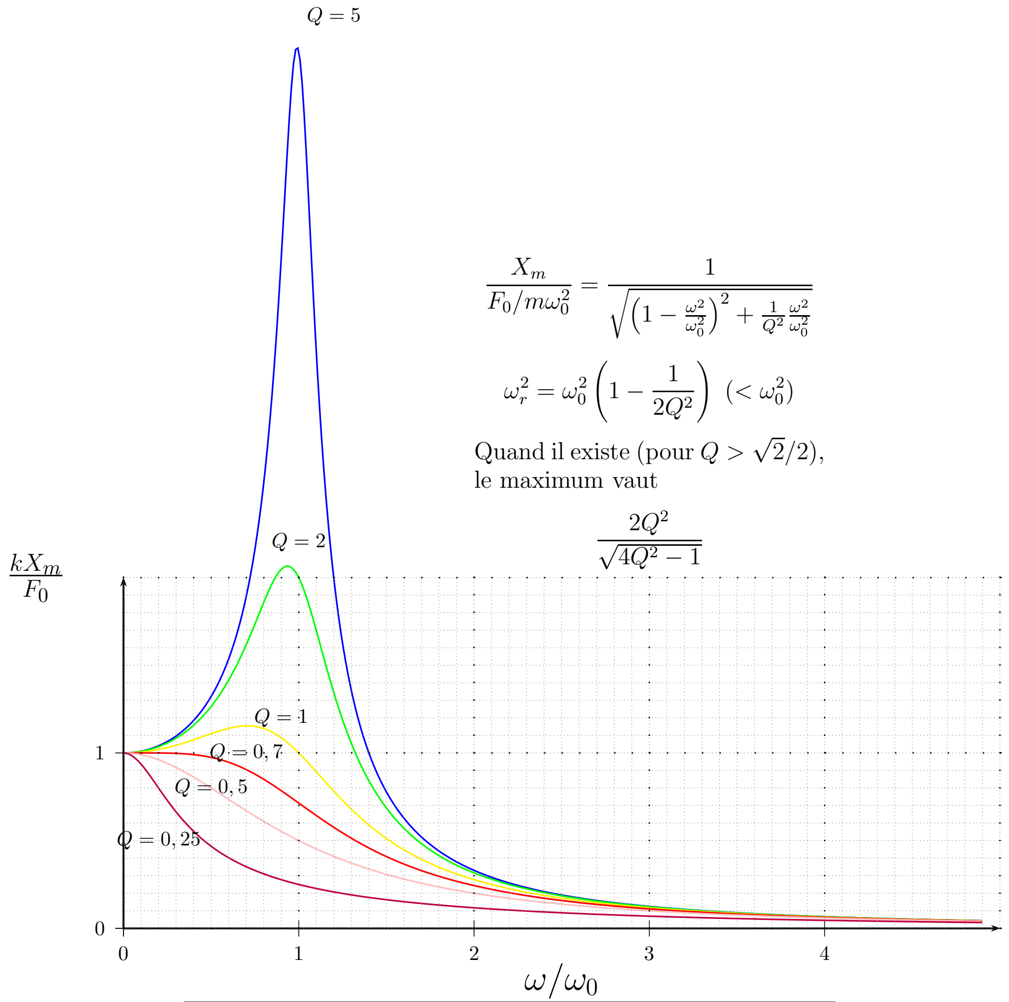
4. Résonance en élongation

L'amplitude X_m est égale au module de $\underline{X}_m$

$$X_m = |\underline{X}_m| = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}$$

que l'on peut aussi écrire en introduisant le rapport $\dfrac{\omega}{\omega_0} = x$ (pulsation réduite)

$$X_m = \frac{\dfrac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}$$



$$\frac{X_m}{F_0/m\omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \quad (< \omega_0^2)$$

Quand il existe (pour $Q > \sqrt{2}/2$), le maximum vaut

$$\frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

$$\boxed{\text{Il y a résonance en élongation seulement si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(voir le cours d'électrocinétique «Régime sinusoïdal forcé»).

Le déphasage φ est égale à l'argument de $\underline{X}_m$

$$\varphi = \arg \underline{X}_m = -\arctan \frac{\omega_0 \omega}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)} = -\arctan \frac{x}{Q(1-x^2)}$$

Pour $x < 1$, sinon il faut ajouter π.

IV - Résonance en vitesse

Par définition : $v = \dfrac{dx}{dt}$, soit avec les grandeurs complexes,

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega\underline{x} = j\omega\underline{X}_m \exp(j\omega t) = \underline{V}_m \exp(j\omega t)$$

$$\underline{V}_m = j\omega\underline{X}_m = j\omega\frac{\dfrac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}}$$

L'amplitude V_m est égale au module de $\underline{V}_m$

$$V_m = |\underline{V}_m| = \omega\frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}$$

$$V_m = \frac{\dfrac{F_0}{m\omega_0}}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0}{\omega} - \dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{Q}\right)^2}}$$

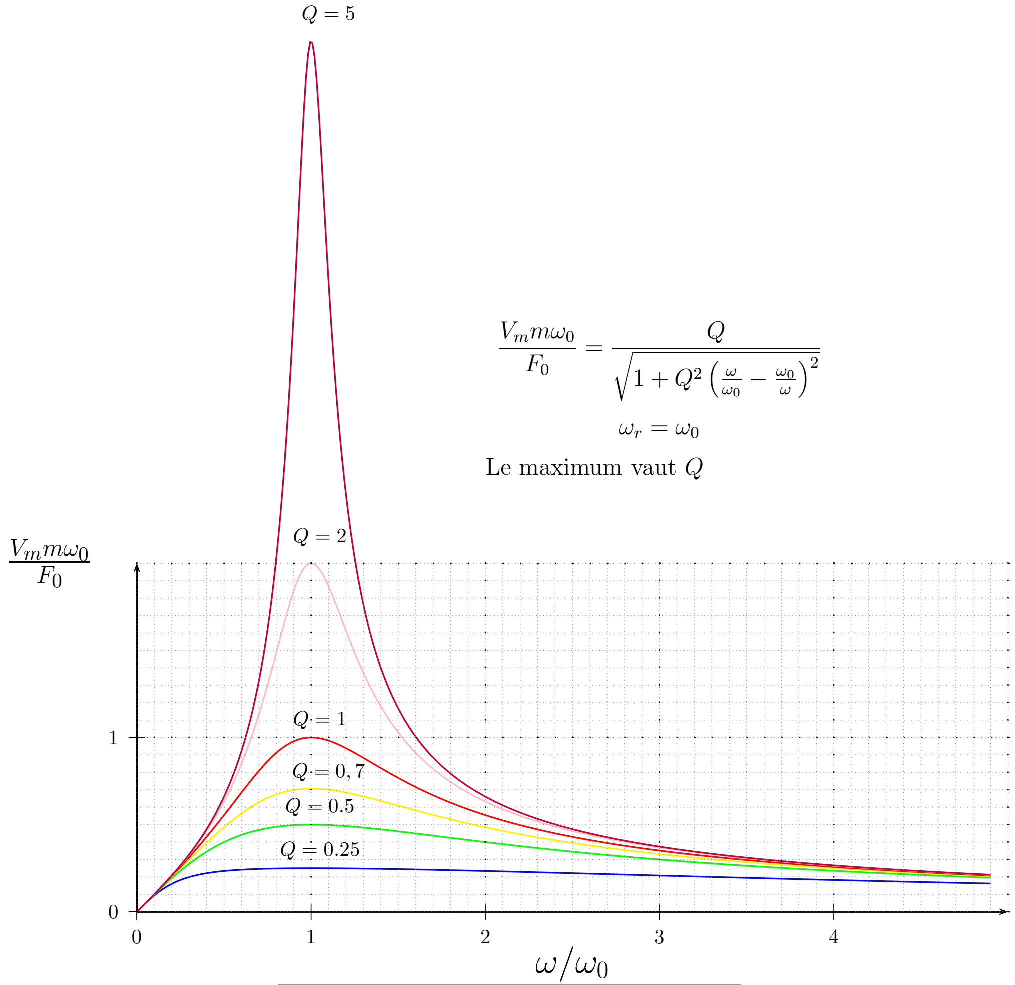
que l'on peut aussi écrire en introduisant le rapport $\dfrac{\omega}{\omega_0} = x$

$$V_m = \frac{\dfrac{F_0}{h}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$$

$$\frac{V_m m\omega_0}{F_0} = \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\omega_r = \omega_0$$

Le maximum vaut Q



$$\boxed{\text{Il y a toujours résonance en vitesse.}}$$

Le déphasage φ_v est égale à l'argument de $\underline{V}_m$

$$\varphi_v = \arg(\underline{V}_m) = -\arctan(Q(x - \frac{1}{x})) = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

Travail et énergie

I - Puissance et travail d'une force

1. Puissance

La puissance est une grandeur scalaire et algébrique :

$$\boxed{\mathcal{P}(\overrightarrow{f}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})}$$

Sa dimension est $[\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}$.

Son unité SI est le watt : 1 W=1 kg.m^2.s^{-3} = 1 N.m.s^{-1}.

Elle est motrice si $\mathcal{P} > 0$, résistante sinon.

2. Travail élémentaire

Le travail élémentaire d'une force s'exerçant sur un point M est

$$\boxed{\delta W(\overrightarrow{f}/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\overrightarrow{f}/\mathcal{R})\mathrm{d}t = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Il s'exprime en joules (J). Sa dimension : [travail] = M.L^2.T^{-2}.

3. Travail le long d'une courbe

On obtient le travail total pour un déplacement fini du point d'application M de la force par l'intégrale curviligne :

$$\boxed{W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_A^B \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_{t_A}^{t_B} \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}(M)\mathrm{d}t}$$

Cette intégrale dépend a priori du chemin suivi.

4. Expressions élémentaires

a Repère cartésien

$\overrightarrow{f} = f_x\,\vec{e}_x + f_y\,\vec{e}_y + f_z\,\vec{e}_z$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$,

$$\delta W(\overrightarrow{f}) = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z$$

b Repère cylindrique

$\overrightarrow{f} = f_r\,\vec{e}_r + f_\theta\,\vec{e}_\theta + f_z\,\vec{e}_z$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$,

$$\delta W(\overrightarrow{f}) = f_r\mathrm{d}r + f_\theta r\mathrm{d}\theta + f_z\mathrm{d}z$$

II - Théorème de l'énergie cinétique

1. Théorème de la puissance cinétique

La **puissance cinétique** est la dérivée temporelle de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\mathcal{P}_c = \frac{dE_c}{dt}}$$

Du principe fondamental de la dynamique découle le **théorème de la puissance cinétique**, s'appliquant pour un point M en mouvement dans un référentiel galiléen sous l'action d'une résultante de forces $\overrightarrow{F}$:

$$\boxed{\mathcal{P}_c(M/\mathcal{R}_g) = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}(M/\mathcal{R}_g) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}_g)}$$

Application :

- Si $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{v}$ alors $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) = 0$ et $E_c =$ cste, le mouvement est uniforme.
- Si $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) > 0$ alors E_c croît donc $\|\overrightarrow{v}\|$ augmente, le mouvement est accéléré.
- Si $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) < 0$ alors E_c décroît donc $\|\overrightarrow{v}\|$ diminue, le mouvement est déccéléré.

2. Théorème de l'énergie cinétique

Par intégration entre les instants t_A (M en A) et t_B (M en B), on obtient le **théorème de l'énergie cinétique**.

Théorème de l'énergie cinétique :
Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants ou deux positions t_A (M en A) et t_B (M en B) est égale à la somme des travaux des forces aplliquées à M entre ces deux instants (ou positions) :

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\overrightarrow{F})\mathrm{d}t = \int_{A}^{B} \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

III - Énergie potentielle

1. Définition

Une force est dite **conservative** $\overrightarrow{F_c}$ lorsque son travail ne dépend par du chemin emprunté. Son travail ne dépend alors que des positions initiale et finale :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F_c}) = E_p(A) - E_p(B)$$

On dit d'une force conservative qu'elle dérive d'une **énergie potentielle**. Son travail élémentaire peut se mettre sous la forme d'une différentielle.

$$\boxed{\delta W(\overrightarrow{F_c}) = \overrightarrow{F_c}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_p}$$

La fonction énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près ; pour fixer cette constante, on se donne une référence en un point O : $E_p(O) = 0$.

2. Exemples

Énergie potentielle de pesanteur :

$$\boxed{E_{p,pes} = +mgz + c_0}$$

(avec une verticale ascendante)

Énergie potentielle élastique :

$$\boxed{E_{p,elas} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2}$$

Énergie potentielle de gravitation :

$$\boxed{E_{p,grav} = -\mathcal{G}\frac{m_P m}{r}}$$

3. Équilibre d'un point matériel et énergie potentielle

Si l'on étudie un problème à **1 degré de liberté** (de paramètre x), l'étude de la fonction $E_p(x)$ nous renseigne sur les positions d'équilibre et leur stabilité :

On a $F(x) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$.

a Positions d'équilibre

Un point matériel est à l'équilibre lorsque sa vitesse et son accélération sont nulles. Dans un référentiel galiléen, lorsqu'un point matériel est à l'équilibre, $\sum\limits_i \overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{0}$.

Soi x_e une position d'équilibre. Elle est caractérisé par $F(x_e) = 0$ soit

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)(x = x_e) = 0}$$

Une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle.

b Stabilité

Une position d'équilibre est stable si la force qui apparaît quand on écarte légèrement le point M de cette position tend à l'y ramener.

Un développement de Taylor au voisinage de la position d'équilibre donne la force ressentie lorsqu'on s'écarte légèrement de cette position :

$$F(x) = F(x_e) + (x - x_e)\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e}$$

Avec $F(x_e) = 0$ et $F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$ donc $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}$, il vient

$$\boxed{F(x) = -(x - x_e)\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}}$$

L'équilibre est donc **stable** si $\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} > 0$ et instable sinon.

Remarquons que le développement de Taylor de l'énergie potentielle donne un profil parabolique (cf oscillateur harmonique), ce qui justifie qu'on cherche fréquemment les "petites oscillations" au voisinage d'une position d'équilibre stable (l'ordre 1 disparaît d'après la condition d'équilibre) :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}$$

IV - Énergie mécanique

1. Définition

On appelle **énergie mécanique** d'un point matériel M la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

2. Propriétés

On sépare les forces **conservatives** $\overrightarrow{F_c}$(dérivant d'une énergie potentielle) des forces dissipatives $\overrightarrow{F_{nc}}$ et des forces ne travaillant pas $\overrightarrow{F_{NTP}}$. Le théorème de l'énergie cinétique donne alors (sous forme élémentaire) :

$$dE_c = \delta W(\overrightarrow{F}_c) + \delta W(\overrightarrow{F_{nc}}) + \delta W(\overrightarrow{F_{NTP}})$$

Or $\delta W(\overrightarrow{F}_c) = -dEp$, donc il vient finalement

$$\boxed{d(E_c + E_p) = dE_m = \delta W(\overrightarrow{F_{nc}})}$$

On nomme parfois **théorème de l'énergie mécanique** la forme intégrale du théorème de l'énergie cinétique, réécrit en séparant les forces dissipatives :

$$\boxed{\Delta E_m = W(\overrightarrow{F_{nc}}) < 0}$$

L'énergie mécanique d'un système se conserve en l'absence de forces dissipatives, ou bien elle diminue au cours du temps si de telles forces existent.

V - Mouvement à un degré de liberté

On étudie le mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$. Il est soumis est des forces conservatives ($\overrightarrow{F_c}$) dérivant d'une énergie potentielle E_p ($\overrightarrow{F_c} \cdot d\overrightarrow{OM} = -dEp$) et éventuellement à des forces qui ne travaillent pas.

Le mouvement est à une degré de liberté (un unique paramètre de position) noté x.

$$\frac{dEp}{dx}(x) = -F(x)$$

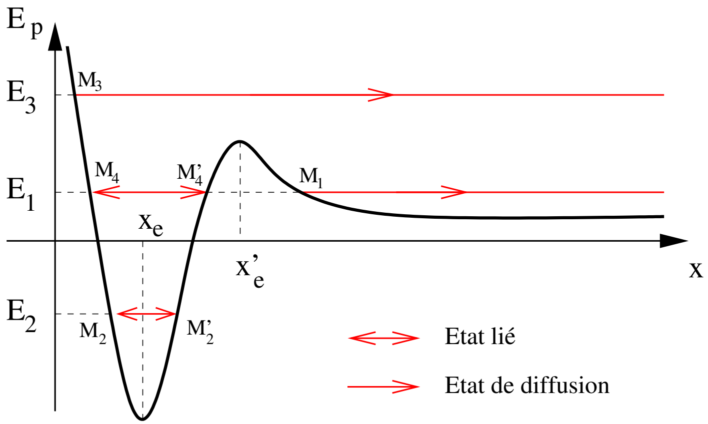
Bilan énergétique – Il y a conservation de l'énergie mécanique lors du mouvement :

$$E_{m0} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = \text{cte}$$

Comme E_c est toujours positif, on a $\boxed{E_{m0} > E_p(x)}$

Cette condition caractérise le **domaine spatial du mouvement**, c'est-à-dire l'ensemble des positions accessibles à la particule d'énergie mécanique E_{m0}.

Rappel : les extrema d'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre. Un minimum correspond à une postion d'équlibre stable, un maximum à une position d'équilibre instable.



- $E_{m_0} < E_{p_{min}}$: Impossible
- $E_{m_0} = E_{p_{min}}$: $x = x_e$
- $E_{m_0} = E_2 \in]E_{p_{min}}; 0]$: x est borné ($x \in [x_2; x_2']$), on a un état lié.
  Si, à $t = 0$, on place le point matériel M en $M_2(x_2)$ sans vitesse initiale, il acquiert une énergie mécanique $E_2 = E_p(x_2)$. L'abscisse x de M doit vérifier à tout instant $E_p(x) \leq E_2$. Le point matériel effectue donc un mouvement d'oscillations autour de la position d'équilibre stable x_e, entre les positions extrêmes M_2 et M_2' pour lesquelles la vitesse s'annule.

- $E_{m_0} = E_1 \in]0; E_{p_{max}}[$:
  - ⋆ soit $x \in [x_4; x_4']$, on a un état lié.
  - ⋆ soit $x \geq x_1$, on a un état libre ou état de diffusion.
    À $t = 0$, on place le point matériel M en $M_1(x_1)$ sans lui communiquer de vitesse initiale; il acquiert donc une énergie mécanique $E_1 = E_p(x_1)$. Au cours du mouvement, on a, à tout instant, $E_p(x) \leq E_1$: la particule n'a d'autre possibilité que de s'éloigner progressivement de M_1, une partie de son énergie potentielle étant convertie en énergie cinétique : $E_c(x) = E_1 - E_p(x)$.

- $E_{m_0} = E_3 > E_{p_{max}}$: $x \geq x_3$, état libre.

Loi du moment cinétique

I - Définitions

1. Moment cinétique par rapport à un point

Pour un **point matériel** $M(m)$ en mouvement de vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, le moment cinétique de M, calculé en un point A est défini par

$$\boxed{\overrightarrow{L_A}(M/\mathcal{R}) \triangleq \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p}(M/\mathcal{R}) \triangleq \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})}$$

Sa dimension est $[L_A] = \mathrm{M.L^2T^{-1}}$.
Son unité SI est le $\mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$ ou encore le N.m.s ou encore le J.s.

2. Moment cinétique par rapport un axe

Le moment cinétique de M, par rapport à un axe $\Delta = (A, \vec{u})$ est la projection sur $\vec{u}$ du moment cinétique de M calculé en un point quelconque de l'axe :

$$\boxed{L_\Delta(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{L_{A\in\Delta}}(M/\mathcal{R}) \cdot \overrightarrow{u}}$$

Dans le cas particulier du mouvement d'un point matériel étudié dans le repère cylindrique d'axe $\Delta = (O, \vec{e_z})$, on a
$\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}) = (r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}) \wedge m(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z})$
$\overrightarrow{L_O}(M) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} + m(z\dot{r} - r\dot{z})\overrightarrow{e_\theta} - mr\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$

$$L_{(Oz)}(M) = \overrightarrow{L_O}(M) \cdot \overrightarrow{e_z} = mr^2\dot{\theta} = mr^2\omega$$

3. Moment d'inertie par rapport à un axe

Le **moment d'inertie** $J_{(Oz)}$ d'un point matériel M par rapport à l'axe (Oz) est $\boxed{J_{(Oz)} \triangleq mr^2.}$

Il donne une expression utile du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) :

$$\boxed{L_{(Oz)}(M/\mathcal{R}) = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta}}$$

4. Moment d'une force

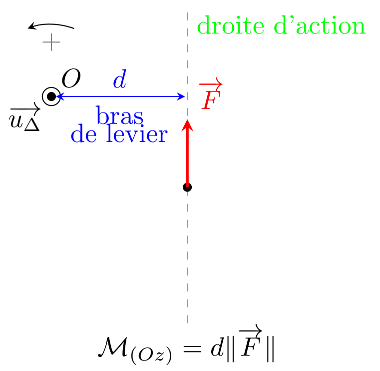
On définit le moment en A d'une force $\overrightarrow{F}$ s'appliquant au point M par

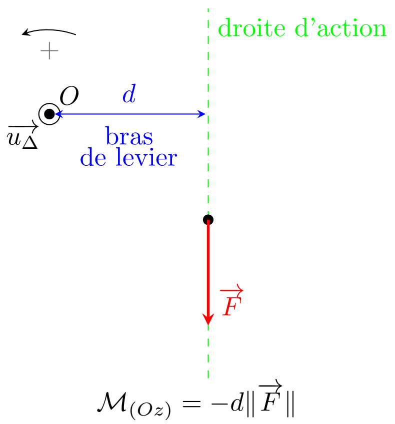
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) \triangleq \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}}$$

Le moment d'une force par rapport à un axe $\Delta = (A, \vec{u})$ est la projection sur cet axe du moment de la force calculé en un point (quelconque) de l'axe :

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) \triangleq \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{u}}$$

Lorsque la force $\overrightarrow{F}$ est dans un plan perpendiculaire à l'axe (Oz), le moment de la force par rapport à (Oz) s'exprime simplement par $\mathcal{M}_{(Oz)} = \pm d\|\overrightarrow{F}\|$, où d est la distance de la droite d'action à l'axe (Oz). On appelle cette distance le "bras de levier". Le signe à attribuer dépend du sens de "rotation" :





II - Loi du moment cinétique pour un point matériel

Pour un point matériel M en mouvement dans un **référentiel galiléen** $\mathcal{R}_g$ sous l'action de forces de résultante $\overrightarrow{F}$, la loi du moment cinétique en un point A **fixe** donne :

$$\boxed{\text{TMC : } \frac{d\overrightarrow{L_A}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F})}$$

En projection sur l'axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$, on a l'expression du théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe :

$$\boxed{\frac{dL_{(Oz)}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\overrightarrow{F})}$$

On applique ce théorème dans deux cas usuels :
- mouvement pendulaire (variation du moment cinétique)
- mouvement à force centrale (conservation du moment cinétique)

Mécanique des systèmes et du solide

Dans tout ce chapitre nous étudions des systèmes $\mathcal{S}$ correspondant à des ensembles de points matériels $\{M_i, m_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i\}$ ou des solides.

On appelle **solide indéformable** un système pour lequel la distance entre tous les couples de points est constante.

I - Cinématique du solide

1. Repérage d'un solide

Pour repérer un solide, on a besoin de 6 paramètres : les 3 coordonnées d'un point particulier O_1 du solide (un sommet de parallélépipède, le centre de masse ...) et 3 angles qui définissent l'orientation des "axes liés au solide" par rapport aux axes du référentiel.

2. Solide en translation

Un solide est dit **en translation** lorsque les directions du repère lié au solide sont **fixes** par rapport au référentiel d'étude. Le mouvement du solide est donc simplement repéré par le mouvement du point particulier O_1 qui le caractérise.

Pour un point P quelconque du solide : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P}$, avec $\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{\text{cte}}$ car le solide est supposé indéformable, et il est fixe dans son référentiel propre.

Il vient $\boxed{\vec{v}(P/\mathcal{R}) = \vec{v}(O_1/\mathcal{R})}$

Tous les points du solide ont même vitesse dans le référentiel d'étude. On dit que le **champ des vecteurs vitesses** dans le solide est **uniforme** à chaque instant.

Conséquence : tous les points du solide décrivent la même trajectoire. On peut alors assimiler le mouvement du solide à celui du point matériel O_1.

Si O_1 a un mouvement rectiligne, le solide est en **translation rectiligne**.

Si O_1 a un mouvement circulaire, le solide est en **translation circulaire** (grande roue de fête foraine).

3. Solide en rotation autour d'un axe fixe

On choisit cet axe fixe privilégié comme l'axe (Oz) du repère d'étude, et on choisit O_1 comme origine des deux repères.

Pour un point P du solide, repéré par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OP} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$, r et z sont fixes, seul θ varie. On a donc $\boxed{\vec{v}(P) = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$.

Tous les points du solide sont en mouvement circulaire à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe fixe (Oz). Il suffit d'une seule coordonnée (angulaire) pour décrire le mouvement. Tous les points du solide ont **même vitesse angulaire**.

Attention à ne pas confondre rotation et translation circulaire.

II - Loi de la résultante cinétique

1. Résultante cinétique ou quantité de mouvement

Centre d'inertie G

On note souvent G le **centre de masse** ou **centre d'inertie** ou **centre de gravité** du système $\mathcal{S}$ considéré. Par définition, on a :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

$$\text{ou } m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

avec m masse totale du système $m = \sum_i m_i$.

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}}$$

Résultante cinétique ou quantité de mouvement

$\vec{p}(\mathcal{S})$ est la quantité de mouvement du système étudié :

$$\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i \overrightarrow{v}_i = m\overrightarrow{v}(G)$$

$$\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m\overrightarrow{v}(G)}$$

2. Loi de la résulante cinétique

Dans un **référentiel galiléen**, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système fermé de masse totale m est égale à la somme des forces extérieures exercées sur le système.

$$\frac{d\vec{p}}{dt}(\mathcal{S}) = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext}$$

Pour un solide en translation, le TRC suffit.

III - Loi du moment cinétique

1. Moment cinétique d'un système par rapport à un point A

Soit $\overrightarrow{L_A}(\mathcal{S})$ le moment cinétique du système étudié par rapport à A point de l'espace :

$$\overrightarrow{L_A}(\mathcal{S}) = \sum_i \overrightarrow{L_A}(M_i) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\overrightarrow{v_i}$$

Dans le cas général, cette expression ne se simplifie pas.

2. Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe fixe

On considère un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe fixe. On utilise le repère cylindrique $(O, \overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e_z})$, avec O un point fixe de l'axe de rotation, et (Oz) axe de rotation.
Tous les points du solide M_i, de masse m_i, ont une trajectoire circulaire autour de (Oz) (rayon r_i, avec la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}_i$). Chaque point M_i a pour vecteur vitesse $\overrightarrow{v_i} = r_i\omega\overrightarrow{e_{\theta_i}}$

On a alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_O}(\mathcal{S}) &= \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge (m_i\overrightarrow{v_i}) \\
&= \sum_i (r_i\overrightarrow{e_{r_i}} + z_i\overrightarrow{e_z}) \wedge (m_i r_i \omega \overrightarrow{e_{\theta_i}}) \\
&= \sum_i \left[(m_i r_i^2 \omega \overrightarrow{e_z}) - m_i r_i z_i \omega \overrightarrow{e_{r_i}}\right] \\
&= \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega\overrightarrow{e_z} - \sum_i m_i r_i z_i \omega \overrightarrow{e_{r_i}}
\end{aligned}$$

Le moment cinétique du solide par rapport à l'axe Oz :

$$L_{Oz}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L_O}(\mathcal{S}).\overrightarrow{e_z} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

ou encore $\boxed{L_{Oz}(\mathcal{S}) = J_{Oz}(\mathcal{S})\omega}$

avec $\boxed{J_{Oz}(\mathcal{S}) = \sum_i m_i r_i^2}$ **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe (Oz), défini comme la somme des moments d'inertie des différents points matériels qui constituent le solide.

On note que $[J_{(Oz)}] = \mathrm{M.L}^2$, et que plus une masse est éloignée de l'axe de rotation, plus elle contribue au moment d'inertie.

3. Loi du moment cinétique pour les systèmes par rapport à un point

Dans un **référentiel galiléen**, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un système fermé par rapport à un point A **fixe** dans le référentiel d'étude est égale au moment en A des **actions extérieures** au système.

$$\frac{d\overrightarrow{L_A}(\mathcal{S})}{dt} = \overrightarrow{\mathscr{M}_{A,ext}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{f_i}(P_i)$$

4. Loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un solide par rapport à un axe fixe dans le référentiel d'étude est égale au moment des actions extérieures au système par rapport à cet axe.

$$\frac{dL_\Delta(\mathcal{S})}{dt} = \mathscr{M}_{\Delta,ext}$$

Le solide en rotation autour d'un axe fixe est caractérisé par son moment d'inertie, la loi précédente prend la forme :

$$\boxed{J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathscr{M}_{\Delta,ext}}$$

a La liaison pivot parfait

On appelle **liaison pivot**, un mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe.

Lors d'une liaison pivot, le solide subit de la part du mécanisme assurant la liaison une action de résultante $\vec{R}$ et de moment en un point A : $\vec{\mathscr{M}_A}$.

Le pivot est dit **parfait** si le moment de l'action par rapport à l'axe de rotation Δ est nul :

$$\boxed{\mathscr{M}_\Delta = 0}$$

b Couple

On appelle **couple** une action exercée sur un système telle que la résultante soit nulle, mais dont le moment résultant en un point A quelconque, noté $\vec{\mathscr{C}}$ est non nul.

Le moment d'un couple est indépendant du point par rapport auquel on le calcule.

IV - Aspect énergétique

1. Pour un système de points matériels

a Énergie cinétique

Par défintion :

$$E_c(\mathcal{S}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

En général, cette expression ne se simplifie pas.

b Travail et puissance des actions

Le point matériel M_i est soumis la force $\vec{f_i} = \overrightarrow{f_{i,int}} + \overrightarrow{f_{i,ext}}$ somme de la résultante des forces intérieures et des forces extérieures s'exerçant sur M_i.

Soit δW_i le travail élémentaire reçu par M_i lors de son déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{r_i}$:

$$\delta W_i = \vec{f_i} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = (\overrightarrow{f_{i,int}} + \overrightarrow{f_{i,ext}}) \cdot \mathrm{d}\vec{r_i}$$

Soit P_i la puissance des forces s'exerçant sur M_i :

$$P_i = \vec{f_i} \cdot \vec{v_i} = (\overrightarrow{f_{i,int}} + \overrightarrow{f_{i,ext}}) \cdot \vec{v_i} = P_{i,int} + P_{i,ext}$$

somme de la puissance des forces intérieures et des forces extérieures s'exerçant sur M_i.

Pour le système, le travail élémentaire reçu entre t et $t + \mathrm{d}t$ est

$$\delta W = \sum_i \delta W_i$$

somme des travaux élémentaires reçu par les M_i du système entre t et $t + \mathrm{d}t$.

D'un point de vue instantané, la puissance reçue par le système à l'instant t est :

$$P = P_{int} + P_{ext}$$

Puissance des actions intérieures :

$$\begin{aligned}
P_{int} &= \sum_i P_{i,int} \\
&= \sum_i \overrightarrow{f_{i,int}} \cdot \overrightarrow{v_i} \\
&= \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{i,j}} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{i,j}} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_j M_i}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

La puissance des actions intérieures n'est a priori pas nulle.

c Énergie potentielle de pesanteur

Dans un champ de pesanteur uniforme, le poids, pour un système de points est $\vec{P} = m\vec{g}$ et son point d'application est G, centre d'inertie.

L'énergie potentielle de pesanteur d'un système de points matériels dans un champ de pesanteur uniforme s'identifie à l'énergie potentielle de pesanteur de son centre d'inertie affecté de la masse totale du système.

d Théorèmes énergétiques

On se place en référentiel galiléen !

Théorème des puissances cinétiques :

$$\frac{\mathrm{d}E_c(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = P_{int} + P_{ext}$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta_{A \to B} E_c = \int_A^B \delta W_{int} + \delta W_{ext}$$

$$dE_c(\mathcal{S}) = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$$

Remarque 1 : on peut aussi introduire l'énergie mécanique du système et les théorèmes liés.
Remarque 2 : en référentiel non galiléen on prend en compte les forces d'inertie.

2. Pour un solide

a Énergie cinétique

Solide en translation :

Tous les points du solide ont même vitesse :

$$\boxed{Ec(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m v(G)^2}$$

Solide en rotation autour d'une axe fixe :

Axe de rotation = axe (Oz) du repère cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Tous les points du solide ont une trajectoire circulaire d'axe $O(z)$.

$$\vec{v}_i = r_i \omega \vec{e}_{\theta_i}$$

Soit $E_c(\mathcal{S})$, l'énergie cinétique du solide :

$$E_c(\mathcal{S}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} J_{oz} \omega^2$$

L'énergie cinétique d'un solide en rotation, à la vitesse angulaire ω, autour d'un axe Δ est

$$\boxed{E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} J_{oz} \omega^2}$$

avec J_Δ moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ.

b Puissance et travail des actions

Actions intérieures

Dans un solide, la distance entre deux points quelconques est constante (le solide ne se déforme pas), par conséquent le travail et la puissance des actions intérieures sont nuls.

$$\boxed{W_{int} = 0 \text{ et } P_{int} = 0 \text{ pour un solide.}}$$

Actions extérieures

Soit $\overrightarrow{f_{i,ext}}$ de point d'application M_i, une action extérieure s'exerçant sur le solide.

Pour un solide en translation : $P_{i,ext} = \overrightarrow{f_{i,ext}} \cdot \overrightarrow{v}(G)$.

Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz). La puissance de cette action a pour expression :

$$P_{i,ext} = \overrightarrow{f_{i,ext}} \cdot \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{f_{i,ext}} \cdot (r_i \omega \overrightarrow{e_{\theta_i}}) = \overrightarrow{f_{i,ext}} \cdot (r_i \overrightarrow{e_{\theta_i}}) \omega = \mathscr{M}_{Oz}(\overrightarrow{f_{i,ext}}) \omega$$

c Théorèmes énergétiques pour un solide

Pour un solide en mouvement dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}Ec(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = P_{ext}$$

$$\mathrm{d}Ec(\mathcal{S}) = \delta W_{ext}$$

$$\Delta Ec(\mathcal{S}) = W_{ext}$$

En bref :

Solide	en translation	en rotation
inertie	masse m	moment d'inertie J_{Oz}
vitesse	linéaire $\vec{v}$	angulaire $\omega = \dot{\theta}$
grandeur cinétique	quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}(G)$	moment cinétique $L_{Oz} = J_{Oz}\omega$
Énergie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2$
Action	Force $\vec{F}$	Moment $\mathscr{M}_{Oz}$
Puissance	$\mathscr{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$\mathscr{P} = \mathscr{M}_{Oz}\,\omega$
Équation du mouvement	$m\frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \vec{F}$	$J_{Oz}\frac{d\omega}{dt} = \mathscr{M}_{Oz}$
Théorème des puissances cinétiques	$\frac{dEc}{dt} = \mathscr{P}$	$\frac{dEc}{dt} = \mathscr{P}$

Mouvements dans un champ de forces centrales conservatif

I - Champ de forces centrales conservatif

1. Définitions

Un force est dite **centrale** si elle est constamment dirigée vers un point fixe, qu'on prend comme origine du repère O (*a priori* sphérique) :

$$\overrightarrow{F}(M) = F(r)\overrightarrow{e_r}$$

Elle est en outre **conservative** si elle dérive d'une énergie potentielle. On a $\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -dE_p$. En coordonnées sphériques, on a alors

$$\boxed{E_p(r) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}(r) = -\frac{dE_p}{dr}\overrightarrow{e_r}}$$

On peut citer comme exemples :

- Interaction gravitationnelle : $F(r) = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ et $E_p(r) = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$
- Interaction coulombienne : $F(r) = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ et $E_p(r) = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$
- Rappel élastique : $F(r) = -k(r-r_0)$ et $E_p(r) = \dfrac{1}{2}k(r-r_0)^2$

2. Conservation du moment cinétique et conséquences

On étudie le mouvement du point matériel M dans un référentiel galiléen. M est soumis à une résultante des forces $\vec{F}$ centrale de centre O. TMC en O fixe dans le référentiel d'étude galiléen :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O(M)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

Il y a conservation du moment cinétique du point matériel M calculé en O.

Conséquence 1 : le mouvement est plan

$\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R}_g) \triangleq \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}_g)$ donne la direction de la normale au plan tangent du mouvement. Si ce vecteur est constant, cela signifie que le mouvement se fait constamment dans le plan défini par $(O, M_0, \overrightarrow{v}_0)$.

On travaille donc en coordonnées polaires dans ce plan privilégié du mouvement, et donc en cylindriques dans l'espace $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Conséquence 2 : le mouvement suit la loi des aires

En coordonnées cylindriques : $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \\ \overrightarrow{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \overrightarrow{L}_O(M) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \end{cases}$

On introduit alors la constante des aires : $\boxed{\mathscr{C} = r^2\dot{\theta}}$, qui est (à un facteur 2 près) la vitesse aréolaire.

> <u>Loi des aires</u>
> Le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des intervalles de temps identiques.

3. Énergie mécanique, énergie potentielle effective

Conservation de l'énergie mécanique

La force centrale étant conservative, le système voit son énergie mécanique conservée : $\boxed{\dfrac{dE_m}{dt} = 0}$

ou

$$E_m = \text{constante} = E_{m0}$$

Énergie potentielle effective

Par définition : $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r)$, avec $\dot{\theta} = \frac{\mathscr{C}}{r^2}$, d'où $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\mathscr{C}^2}{r^2} + E_p(r)$.

On pose

$$\boxed{E_{p_{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{\mathscr{C}^2}{r^2} + E_p(r)}$$

énergie potentielle effective.

On a alors $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$, et on peut exprimer le "domaine radial du mouvement" par la condition $\boxed{E_m \geqslant E_{p,eff}(r)}$.

Selon la nature de la force centrale, on aura différents profils d'énergie potentielle effective possibles, donc différents types de trajectoires accessibles.

II - Étude d'un champ newtonien attractif

Les interactions newtoniennes correspondent à des interactions dont l'intensité varie en $\frac{1}{r^2}$:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Si $K < 0$ force répulsive (ex : $K = \frac{-q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$ avec $q_1q_2 > 0$) ; si $K > 0$ force attractive (ex : $K = \mathscr{G}m_1m_2 > 0$).

Par la suite on étudie le mouvement d'une planète (masse m) de centre P autour du Soleil (masse M_S) de centre S dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Les résultats seront transposables au cas du mouvement d'un satellite autour d'une planète.

1. Lois de Képler

On peut citer dans le cas du mouvement des planètes autour du soleil les trois lois énoncées par Képler :

1. Loi des orbites : les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.
2. Loi des aires : les aires balayées par le segment SP (soleil-planète) pendant des intervalles de temps identiques sont égales.
3. Loi des périodes : le rapport du carré de la période de révolution de la planète sur le cube du demi-grand axe de son orbite est le même pour toutes les planètes du système solaire. $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}}$

2. Étude du mouvement circulaire

Vitesse

Le mouvement est circulaire, on peut écrire $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$. D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\left[-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}\right] = -\frac{\mathscr{G}M_Sm}{R^2}\overrightarrow{e_r}$$

Le mouvement est donc uniforme de vitesse

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_S}{R}}}$$

avec R rayon de l'orbite circulaire.

Énergie mécanique

Par définition, $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathscr{G}M_Sm}{R} = \frac{1}{2}m\frac{\mathscr{G}M_S}{R} - \frac{\mathscr{G}M_Sm}{R}$

$$\boxed{E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathscr{G}M_Sm}{R} < 0}$$

Période de révolution

Le mouvemet étant uniforme, on peut écrire $v_0 = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_S}{R}} = \frac{2\pi R}{T}$, il vient

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_S}}$$

indépendant de la planète considérée.

3. Étude qualitative : les différentes trajectoires

Le graphe suivant montre le profil énergétique correspondant à une force centrale newtonienne (en $1/r^2$) attractive (force gravitationnelle ou force électrostatique entre deux charges opposées).

On choisit d'étudier le cas de l'interaction gravitationnelle avec le soleil.

On a alors $E_p(r) = -\dfrac{GmM_S}{r}$, où M_S est la masse du soleil.

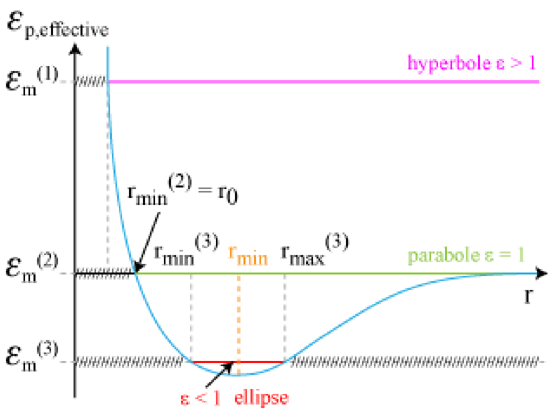
Il vient

$$E_{p,eff}(r) = -\frac{GmM_S}{r} + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2}$$

Cette fonction admet un minimum en

$$r_0 = \frac{C^2}{GM_S} \quad \text{et} \quad E_{p,eff}(r_0) = -\frac{GmM_S}{2r_0} = E_0$$

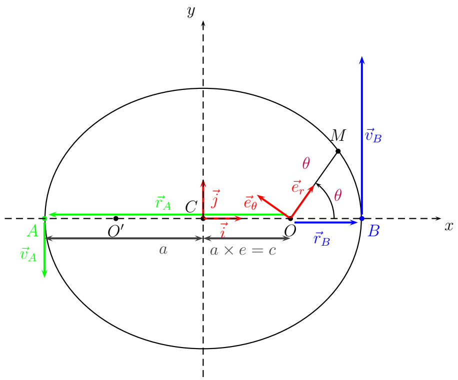
Selon la valeur de l'énergie mécanique, on peut avoir des trajectoires correspondant à des états diffusifs ou à des états liés.



- $E_m > 0$: la trajectoire est une **branche d'hyperbole** (branche entourant le foyer où se trouve le soleil)
- $E_m = 0$: la trajectoire est une **parabole**, c'est l'état limite entre un état lié et un état diffusif.
  Comme la particule peut s'éloigner à l'infini du Soleil, cette trajectoire ne peut pas décrire un mouvement planétaire.
- $E_0 < E_m < 0$: la trajectoire est une **ellipse**, l'état est lié, et $r_1 < r < r_2$.
  Le point le plus proche du soleil $P(r = r_1)$ s'appelle le périhélie, le point le plus éloigné du soleil $A(r = r_2)$ s'appelle l'aphélie. D'après la loi des aires, $C = rv = cte$ et $r_P < r_A$ donc $v_P > v_A$.
  L'énergie mécanique est donnée par $\boxed{E_m = -\dfrac{GmM_S}{2a}}$ avec $\boxed{2a = r_P + r_A}$
  où a est le demi-grand axe de l'ellipse.
  La troisième loi de Kepler s'exprime par $\boxed{\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}}$.
- $E_m = E_0$: la trajectoire est circulaire.

4. À propos de la trajectoire elliptique (Hors programme)

a L'ellipse



Équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a : demi-grand axe, b : demi-petit axe.

Équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$

p paramètre de l'ellipse, $p = \dfrac{b^2}{a}$
e excentricité de l'ellipse, $e = \dfrac{c}{a}$ avec c demi-distance focale.

On a $a^2 = b^2 + c^2$.

O = un des foyers de l'ellipse, centre du Soleil.
P est le point le plus proche du Soleil sur la trajectoire elliptique, c'est le Périhélie.
A est le point le plus éloigné du Soleil sur la trajectoire elliptique, c'est l'Aphélie.

On a $OP = r_P = a(1-e)$, et $OA = r_A = a(1+e)$.

b Énergie mécanique

Au cours du mouvement, il y a conservation du moment cinétique : $\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{cste}$, on peut donc écrire $\vec{L}_O(A) = \vec{L}_O(P)$ ou $\vec{r_A} \wedge m\vec{v}_A = \vec{r_P} \wedge m\vec{v}_P$. Or, en A et P, le vecteur position et le vecteur vitesse sont orthogonaux entre eux. On en déduit :

$$\boxed{r_A \times v_A = r_P \times v_P}$$

Au cours du mouvement il y a aussi conservation de l'énergie mécanique avec $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{\mathscr{G}M_\odot m}{r}$.

D'où $\dfrac{1}{2}mv_A^2 - \dfrac{\mathscr{G}M_\odot m}{r_A} = \dfrac{1}{2}mv_P^2 - \dfrac{\mathscr{G}M_\odot m}{r_P}$,
$\dfrac{1}{2}m(v_P^2 - v_A^2) = \mathscr{G}M_\odot m\left(\dfrac{1}{r_P} - \dfrac{1}{r_A}\right)$ avec $v_A = \dfrac{r_P}{r_A}v_P$, $r_P = a(1-e)$ et $r_A = a(1+e)$.

$$v_P^2\left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2}\right) = 2\mathscr{G}M_\odot\left(\frac{1}{a(1-e)} - \frac{1}{a(1+e)}\right) = \frac{2\mathscr{G}M_\odot}{a}\left(\frac{1+e-1+e}{1^2-e^2}\right)$$

$$v_P^2\left(1 - \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2}\right) = \frac{4e\mathscr{G}M_\odot}{a(1-e^2)}$$

$$v_P^2\left(\frac{(1+e)^2-(1-e)^2}{(1+e)^2}\right) = \frac{4e\mathscr{G}M_\odot}{a(1-e^2)}$$

$$v_P^2\left(\frac{4e}{(1+e)^2}\right) = \frac{4e\mathscr{G}M_\odot}{a(1-e^2)}$$

$$v_P^2 = \mathscr{G}M_\odot\frac{1+e}{a(1-e)}$$

En reprenant l'expression de l'énergie mécanique au point P on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}m\mathscr{G}M_\odot\frac{1+e}{a(1-e)} - \frac{\mathscr{G}M_\odot m}{a(1-e)}$$

$$E_m = \frac{1}{2a}m\mathscr{G}M_\odot\left(\frac{1+e}{1-e} - \frac{2}{1-e}\right)$$

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathscr{G}M_\odot m}{2a}}$$

c Période de révolution

D'après la loi des aires, au cours du mouvement, la vitesse aréolaire est constante. On a : $\dfrac{d\mathscr{A}}{dt} = \dfrac{\mathscr{A}}{T} = \dfrac{1}{2}\mathscr{C}$ avec $\mathscr{C}$ constante des aires.
On a vu que $\mathscr{C} = r_P \times v_P$. Sachant que l'aire d'une ellipse est $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$, on obtient :

$$\frac{\pi^2a^4(1-e^2)}{T^2} = \frac{1}{4}a^2(1-e)^2 \times \mathscr{G}M_\odot\frac{1+e}{a(1-e)}$$

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}(1-e)(1+e) = \mathscr{G}M_\odot(1-e)(1+e)$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathscr{G}M_\odot}}$$

5. À propos des satellites.

On étudie le mouvement d'un satellite S (masse m_S) autour de la Terre T (masse M_T). Le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen.

a Satellite géostationnaire

Pour qu'un satellite soit géostationnaire, il doit avoir une trajectoire circulaire (pour avoir un mouvement uniforme) et il doit se trouver dans le plan équatorial. La période de sa trajectoire est $T \approx 24h$.

Pour une trajectoire circulaire :

$$v^2 = \frac{\mathscr{G}M_T}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

Soit

$$\boxed{R^3 = \frac{\mathscr{G}M_T T^2}{4\pi^2}}$$

Application numérique : $R = 42,3.10^3$ km ; $h = R - R_T = 36.10^3$ km.

b Première vitesse cosmique

Si le satellite est lancé avec une vitesse suffisamment faible depuis la surface de la Terre pour rester lié à elle, il décrit une trajectoire elliptique. Cette trajectoire étant fermée, le satellite finit par retomber sur Terre !
Conséquence : la satellisation d'un corps s'effectue en deux étapes :
- Première phase : sortie de l'atmosphère avec une accélération continue.
- Deuxième phase : mouvement purement balistique dû au champ gravitationnel de la Terre.

On note v_1 la première vitesse cosmique : c'est la vitesse que doit posséder le satellite pour avoir une trajectoire circulaire basse autour de la Terre.

D'après la deuxième loi de Newton, nous avons :

$$m_S \vec{a} = \vec{f} = -\frac{\mathscr{G}M_T m_S}{r^2}\vec{e_r}.$$

Avec

$$r = R_0 \;\; ; \;\; \vec{a} = -\frac{v_1^2}{R_0}\vec{e_r} \;\; ; \;\; r = R_T + z \;\; (z = \text{altitude du satellite et } : z \ll R_T).$$

Soit

$$\frac{v_1^2}{R_0} = \frac{\mathscr{G}M_T}{R_0^2}$$

ou

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_T}{R_0}}.$$

En prenant $R_0 \approx R_T = 6400$ km et $g_0 = \dfrac{\mathscr{G}M_T}{R_T^2} \approx 10$ m.s^{-2}, on obtient :

$$v_1 = 8,0.10^3 \text{ m.s}^{-1} = 29.10^3 \text{ km.h}^{-1}.$$

En pratique il faut atteindre une altitude supérieure à 200 km pour éviter les interactions avec l'atmosphère.

Applications : satellites de communication, de positionnement, d'imagerie terrestre...

c Vitesse de libération

Cette deuxième vitesse cosmique correspond à la vitesse limite pour passer d'un état lié à un état de diffusion hyperbolique.

Pour $v > v_1$, la trajectoire reste elliptique (état lié) tant que l'énergie mécanique du satellite reste négative. Soit v_i la vitesse initiale du satellite. Il se trouve initialement au périgée de la trajectoire, au voisinage de la Terre. Nous avons :

$$E_m = \frac{1}{2}m_S v_i^2 - \frac{\mathscr{G}M_T m_S}{R_T} < 0.$$

Soit

$$v_i < \sqrt{\frac{2\mathscr{G} M_T}{R_T}} = v_2.$$

$v_2 = \sqrt{2} v_1$ est la vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique. C'est la vitesse maximale au sens strict que doit avoir le satellite pour ne pas quitter le voisinage de la Terre.

Application numérique : $v_2 = 11$ km.s^{-1} $= 41.10^3$ km.h^{-1}.

d Troisième vitesse cosmique

Si $v_i > v_2$, le satellite "quitte" la Terre. Il s'en éloigne infiniment. Il possède alors la vitesse limite $v_l = \sqrt{v_i^2 - v_2^2}$.

Son évolution ultérieure se fait dans le système solaire. On peut considérer qu'il devient un satellite du Soleil. On appelle troisième vitesse cosmique la vitesse qu'il faut fournir au satellite pour qu'il puisse quitter le système solaire.

$v_3 \approx 60.10^3$ km.h^{-1}.