Cinématique et dynamique du point

1. Spirale exponentielle

Le mouvement plan d'un point P est donné par son équation en coordonnées polaires :

$$r = ae^{\theta},$$

avec $\theta = kt$ (a et k sont deux constantes positives).

1. Exprimer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires.
2. Montrer que l'angle entre le rayon $\overrightarrow{OP}$ et le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ est constant et donner sa valeur.

2. Une hélice

Dans un référentiel $\mathscr{R}$, un point M décrit une hélice. Les équations horaires de ce mouvement, dans la base cartésienne $(Oxyz)$ sont :

$$\overrightarrow{OM}(t) : \begin{cases} x(t) & = & r_0 \cos(\omega t) \\ y(t) & = & r_0 \sin(\omega t) \\ z(t) & = & h\omega t \end{cases}$$

où h, ω et r_0 sont des constantes positives.

1. Montrer que le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) décrit un cercle de centre O.
   Dessiner l'allure de la trajectoire.
2. Exprimer la vitesse et l'accélération de M dans $\mathscr{R}$ en coordonnées cartésiennes.
3. Déterminer les équations horaires du mouvement en coordonnées cylindriques, ainsi que les expressions de la vitesse et de l'accélération dans ces coordonnées.
4. Vérifier que les normes de la vitesse et de l'accélération ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé.
5. Donner la distance $s(t)$ parcourue par M le long de sa trajectoire en fonction du temps.

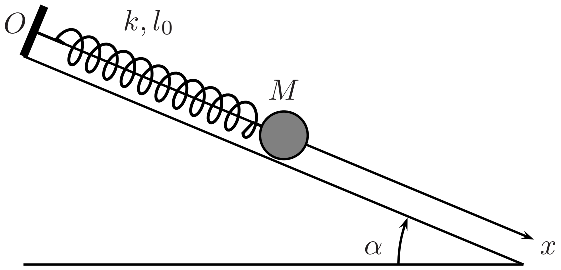
3. Freinage en v^2

Un mobile animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0 \overrightarrow{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\overrightarrow{a} = -kv^2 \overrightarrow{i}$; k est une constante et v la vitesse instantanée. La trajectoire est rectiligne.

1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $v(t)$.
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Montrer qu'après un parcours x, la vitesse est $v = v_0 e^{-kx}$.
4. Que dire du mobile après un temps très long ?

4. Ressort incliné

On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe (Ox) sur le plan incliné (voir la figure).



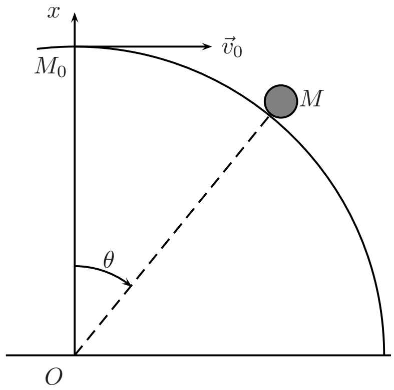
1. Déterminer l'abscisse x_e du point M à l'équilibre en fonction de ℓ_0, m, g, k et α.
2. À partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur (Ox) et lâché sans vitesse initiale. Établir l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d, k, m et x_e.

5. Glissade sur hémicylindre

Un esquimau (point matériel M) glisse sans frottement sur un igloo qui est en fait un demi cylindre de glace, d'axe horizontal, de section circulaire de rayon r. Il est abandonné d'un point M_0 avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$ perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$.

Montrer que M quitte le cylindre en un point M_0' caractérisé par l'angle $\theta_m = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_0'})$. Entre quelles limites varie cet angle ?

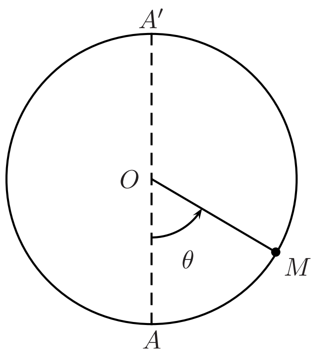
Pour quelle valeur v_{0m} de v_0 le point M quitte-t-il le cylindre tout de suite ?



6. Pendule et tension

Un point matériel M, de masse m, relié à l'origine O par un fil inextensible et sans masse, décrit dans le sens positif un cercle vertical, de centre O, de rayon r.

1. Quelles sont les tensions $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_{A'}$ lorsque M passe en A avec la vitesse $\vec{v}_A$ et en A' avec la vitesse $v_{A'}$? (On exprimera T_A et $T_{A'}$ en fonction de v_A, $v_{A'}$, m, r et g intensité du champ de pesanteur).
   Les valeurs trouvées sont-elles toujours positives ?
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ que fait OM avec la verticale. Pour intégrer cette équation, multiplier chaque terme par $\dfrac{d\theta}{dt}$ pour faire apparaître des dérivées connues, en déduire l'expression de la vitesse à l'instant t sachant qu'à l'instant initial $\theta = 0$ et $v = v_0$ (on exprimera v^2 en fonction de v_0, g, r et θ). Calculer alors la tension du fil T en fonction de v_0, g, r et θ.
3. La vitesse initiale v_0 étant donnée, on désigne par θ_v la valeur de θ qui annule l'expression de v et par θ_T celle qui annule l'expression de T. Exprimer $\cos\theta_v$ puis $\cos\theta_T$ en fonction de v_0, g et r, et tracer les courbes $\cos\theta_v = f(v_0^2)$ et $\cos\theta_T = f(v_0^2)$. En déduire la nature du mouvement de M suivant la valeur de v_0.


A'
O
θ
M
A