Énergie et moment cinétique

1. Hélice

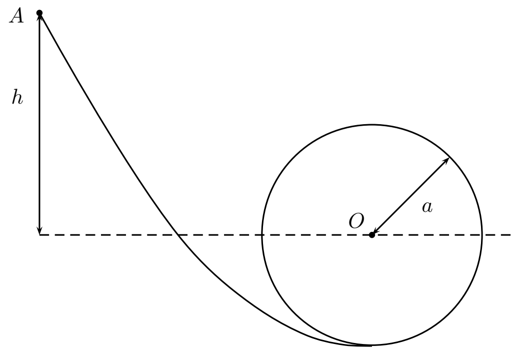
Les équations en coordonnées cylindriques d'une hélice d'axe verticale (Oz) sont $r = a$ et $z = h\theta$. Un petit anneau enfilé sur l'hélice est abandonné sans vitesse initiale au point d'altitude $H = 2\pi h$.

En assimilant l'anneau à un point matériel mobile sans frottement le long de l'hélice, calculer le temps qu'il met pour atteindre le plan horizontal $z = 0$ sous l'action de son poids.

2. Looping

Une particule matérielle glisse sans frottement dans une gouttière terminée par une boucle circulaire.

Calculer la valeur minimale de l'altitude initiale h pour que la particule abandonnée en A sans vitesse initiale reste en contact avec la gouttière tout au long du trajet.

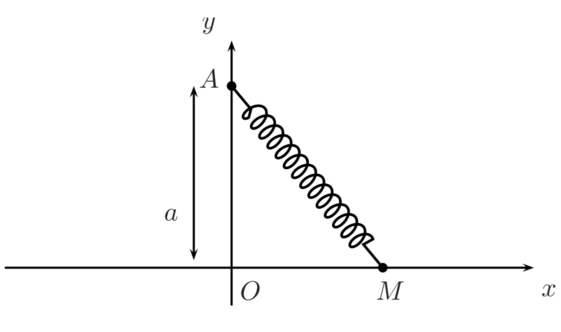


3. Stable ou instable ?

On considère le système présenté sur la figure ci-dessous. La masse m peut glisser sans frottement le long de (Ox) horizontal. Elle est attachée à un ressort de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, fixé en A d'abscisse a.

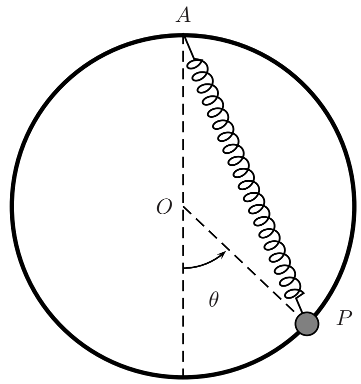
Étudier la ou les positions d'équilibre du système, ainsi que leur stabilité dans les trois cas suivants :

1. $a < \ell_0$,
2. $a = \ell_0$,
3. $a > \ell_0$.



4. Perle sur un cerceau 2

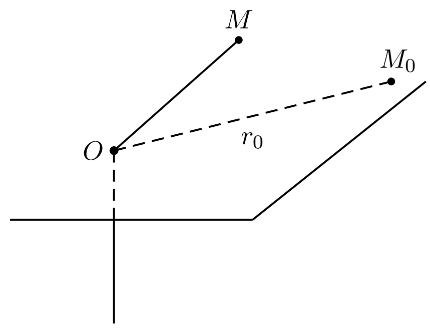
Une perle P de masse m peut se déplacer sans frottements sur un cercle vertical de centre O et de rayon a. Elle est reliée au point le plus haut A du cercle par un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0.
On note θ l'angle que fait OP avec la verticale descendante.
On note g la valeur du champ de pesanteur où se produit l'expérience.



1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la perle.
2. Exprimer la tension $\vec{T}$ du ressort en fonction de a, l_0, θ, k et $\overrightarrow{AP}$.
3. Établir l'expression de la vitesse de la perle.
4. Calculer $\vec{T} \cdot \vec{v}$. En déduire que la tension du ressort dérive d'une énergie potentielle élastique dont on donnera l'expression en fonction de k, a, l_0 et θ.
5. Mêmes questions pour le poids.
6. L'origine des énergies potentielles étant choisie nulle pour $\theta = 0$, donner l'expression de l'énergie potentielle du système.
7. Exprimer l'énergie mécanique et en déduire l'équation du mouvement.
8. À partir des résultats précédents dénombrer les positions d'équilibre possibles.
9. Discuter de leur existence en précisant les éventuelles conditions qui en découlent.
10. Étudier la stabilité des positions d'équilibre lorsqu'elles existent.
11. On a $l_0/2a = 0,4$ et $mg/ka = 0,2$; déterminer la pulsation Ω des petites oscillations autour des positions d'équilibre stable.
    On donnera la valeur de Ω en fonction de $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

5. Fil de longueur variable

Une bille M, de masse m, attachée à un fil inextensible, glisse sans frottement sur un plan horizontal.
Elle est reliée au point O de ce plan par ce fil dont on peut faire varier la longueur horizontale en utilisant, par exemple, un petit trou aux bords arrondis placé en O.



1. Initialement, la bille est animée d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse v_0, la longueur de la portion OM du fil étant r_0. Calculer le moment cinétique de la bille par rapport à O.
2. On tire sur l'autre extrémité du fil avec une vitesse constante v_1.
   (a) Donner l'expression de $r = OM$ en fonction du temps.
   (b) Grâce au théorème du moment cinétique, établir l'expression de $\theta(t)$.
   (c) Déterminer l'expression de $\overrightarrow{T}$ tension du fil.
   (d) Sachant que $v_0 = v_1 = 0,1$ m.s^{-1} et $r_0 = 1$ m, dessiner la trajectoire de M pour $0 < t < 8$ s.

6. Pendule conique

Un point matériel M (masse m) est suspendu à un fil inextensible (de masse négligeable, de longueur L) attaché en un point O_1 fixe d'un axe (Oz). Le point matériel M est astreint à tourner autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω constante, dans le référentiel galiléen d'étude.

1. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_{O_1}$, calculé en O_1, du point M, en utilisant la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ telle que $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$ avec $R = L\sin\alpha$.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique en O_1, et en déduire l'angle d'inclinaison constant α du pendule avec l'axe (Oz) en fonction de L, ω et du champ de pesanteur g.