

Mécanique des solides

1. Face cachée de la Lune

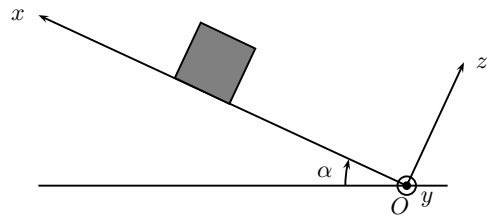
Dans le référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire centrée sur la Terre en 27,3 jours. La distance du centre de la Terre au centre de la Lune est environ égale à $D_{TL} = 3,84 \cdot 10^5$ km. Au cours de cette révolution, la Lune montre toujours la même face à la Terre.

1. Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique. On s'attachera particulièrement à distinguer s'il s'agit d'un mouvement de translation circulaire ou de rotation.
2. En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ de la révolution du centre de la Lune sur sa trajectoire.
3. Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de sa vitesse.
4. Décrire le mouvement de la Lune dans le repère sélénocentrique qui a les mêmes axes de référence que le référentiel géocentrique mais dont l'origine est le centre de la Lune.
5. Déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}_P$ de la rotation de la Lune sur elle-même.

2. Caisse sur plan incliné

Une caisse assimilée à un cube d'arête a , de masse $m = 20$ kg est posée sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il existe entre la caisse et le plan des frottements solides : la réaction du plan sur la caisse est donc de la forme $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$, avec $\vec{R}_N$ composante normale au plan et $\vec{R}_T$ composante tangentielle au plan. En l'absence de glissement, les normes de ces deux composantes sont liées par la relation $R_T \leq \mu R_N$ où $\mu = 0,40$ est le coefficient de frottement.

Lors du glissement de la caisse, on a la relation $R_T = \mu R_N$



1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la caisse. Les représenter sur un schéma. On note G le centre d'inertie de la caisse (confondu avec le centre du cube).
2. On cherche le point d'application I de la réaction du plan incliné lorsque la caisse est immobile. Quelles sont les deux relations vectorielles que doivent vérifier les forces ? En déduire la position de I .
3. Déterminer la valeur maximale α_{max} pour que la caisse puisse rester immobile.
4. On a $\alpha = 20^\circ$. La caisse est lancée depuis le bas du plan incliné vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ de norme $3,0 \text{ m.s}^{-1}$.
 - (a) Établir l'équation horaire de la caisse.
 - (b) Déterminer la date à laquelle la caisse s'arrête ainsi que la distance parcourue.

3. Étude d'une poulie

Une masse de $m = 5,0$ kg est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1,0$ kg et de rayon $R = 10$ cm en liaison pivot idéale autour de son axe avec un support fixe. On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $J = \frac{1}{2} m_p R^2$.

1. Aspect cinématique

On suppose que la poulie est en rotation uniforme autour de son axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$.

Quelle est la vitesse de la masse m ?

2. Aspect statique

Cette même poulie est retenue par un opérateur.

Quelle force l'opérateur doit-il exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?

3. Aspect dynamique

Avec le même dispositif, l'opérateur lâche la poulie.

Déterminer l'accélération angulaire du cylindre, l'accélération linéaire de la masse m et la tension de la corde.

4. Pendule lesté

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L de l'axe de rotation horizontal de la tige. On néglige le moment d'inertie de la tige devant les moments d'inertie des deux masses.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L} \sin \theta = 0.$$

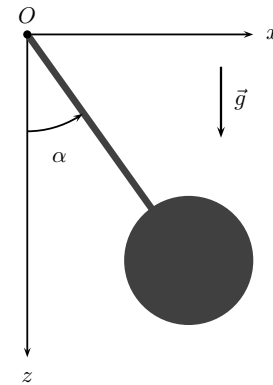
3. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à la distance $3L/4$ de l'axe.
4. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique (ou la loi de la quantité de mouvement) à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

5. Pendule pesant

On considère le pendule ci-contre capable d'osciller librement autour de l'axe horizontal (Ox) grâce à une liaison pivot parfaite.

Il est constitué d'une barre homogène, de section constante et de masse m , à l'extrémité de laquelle on a soudé un disque homogène de masse $2m$ et de centre C . L'ensemble obtenu constitue un solide rigide. On note G le centre de masse de ce pendule et b la distance entre O et G . Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Ox) est $J_{Ox} = kmb^2$, k étant un réel positif.

On écarte le pendule d'un angle α_0 par rapport à sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$. On repère la position du pendule grâce à l'angle α que forme la direction de la barre avec l'axe vertical descendant.



1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit α .
2. Une mesure expérimentale permet de déterminer la période T des petites oscillations. Déterminer le coefficient k en fonction de T , g et b .