Forces centrales conservatives

1. Distance minimale d'approche

Soit une particule A de masse m soumise à une force centrale du type $\overrightarrow{f} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{u}$ avec $K > 0$ et $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA}$.

1. À partir d'un point très éloigné de O, on lance la particule A vers O avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0$ dont le support passe par O. Quelle est la trajectoire de A ? Montrer que A ne dépassera pas une position P_0 repérée par $OP_0 = r_0$ que l'on déterminera. Décrire qualitativement le mouvement de A.
2. A est lancée vers O avec la même vitesse $\overrightarrow{v_0}$, le support de $\overrightarrow{v_0}$ passe cette fois à la distance h de O. Calculer la distance minimale d'approche r_1 en fonction de r_0 et h.
   On montrera que le mouvement se fait dans un plan que l'on précisera. Indiquer si la concavité de la trajectoire est tournée vers O ou lui est opposée. Montrer que lorsque la distance de A à O est minimale, la vitesse v_1 de A est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$. Calculer cette distance minimale en fonction de r_0.

2. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m, charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.
Données : constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s ;
vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^{8}$ m.s^{-1} ; permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m^{-1} ; charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $1,0$ eV$= 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

1. Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.
2. Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.
3. Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

   Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tels que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

   $$L_P(n) = n\hbar$$

   où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.
4. Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.
5. En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.
6. Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

   $$E_n = -\frac{E_0}{n^2}.$$

   Calculer numériquement E_0

3. CoRoT

CoRoT (pour COnvection, ROtation et Transits planétaires) est un télescope spatial dédié à l'étude de la structure interne des étoiles et à la recherche d'exoplanètes. Lancé le 27 décembre 2006, CoRoT est le premier télescope en orbite destiné à la recherche de planètes extrasolaires. Ce satellite est placé en orbite polaire circulaire à 896 km d'altitude.

Calculer la vitesse de ce satellite ainsi que sa période de révolution.

Données : $R_T = 6400$ km rayon de la Terre ; $\mathscr{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I. constante de gravitation ; $M_T = 6.10^{24}$ kg masse de la Terre ; $M_C = 668$ kg masse du satellite.

4. Orbite de transfert

Un satellite S de masse m tourne autour de la Terre sur une orbite circulaire (orbite basse de rayon R_1, de vitesse v_1). On veut le transférer sur une autre orbite circulaire (orbite haute de rayon R_2, de vitesse v_2). Pour cela on lui fait décrire une demi-ellipse (dite orbite de transfert) dont l'un des foyers est le centre de la Terre et qui se raccorde tangentiellement aux deux orbites circulaires précédentes. On allume donc les propulseurs du satellite pendant une durée brève au début et à la fin de cette demi-ellipse, ce qui correspond à communiquer à chaque fois au satellite un supplément de vitesse (sans changer de direction) de façon quasi-instantanée.

Calculer ces suppléments de vitesse.

Données : $R_1 = 6700$ km ; $R_2 = 42000$ km ; $R = 6400$ km ; $g(\text{sol}) = 9,8$ m.s^{-2}.