

# Statique des fluides

## I Équation fondamentale

### 1 Quelques définitions

On appelle **fluide** tout corps susceptible de s'écouler facilement sous l'action d'une force de faible intensité (= liquide ou gaz).

Le fluide se trouve en équilibre lorsque toute partie de ce fluide est en équilibre mécanique dans un référentiel donné. On parle de fluide au repos.

Le fluide est considéré comme un milieu continu décomposable en particule de fluide, infiniment petite à l'échelle macroscopique et infiniment grande à l'échelle microscopique. On parle d'échelle mésoscopique.

Le fluide est dit parfait si ses différentes parties peuvent glisser les unes sur les autres sans frottement (absence de viscosité).

### 2 Champs de forces dans un fluide

Parmi les actions extérieures subies par une partie quelconque du fluide il faut distinguer :

- ★ les forces volumiques qui correspondent à des interactions de longue portée.

Une particule fluide de volume élémentaire  $d\tau$  subie une force élémentaire  $d\vec{F}$  proportionnelle à  $d\tau$  :  $d\vec{F} = \vec{f}_V d\tau$ .  $\vec{f}_V$  est la densité volumique de force.

Exemple : le poids  $d\vec{P} = dm \vec{g} = \rho \vec{g} d\tau$ .

- ★ les forces surfaciques qui correspondent à des interactions de courte portée.

Exemple : les forces pressantes :  $d\vec{F} = Pd\vec{S}$ .

### 3 Équivalent volumique des forces pressantes

La résultante des forces pressantes sur la surface d'une particule fluide de volume  $d\tau$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{dF}_{\text{pression}} = -\vec{\text{grad}} P d\tau$$

Cette force est identique à celle que subirait le volume  $d\tau$  s'il était soumis à une force volumique  $-\vec{\text{grad}} P$ .

## 4 Principe fondamental de la statique des fluides

Soit un fluide soumis à des forces volumiques de densité  $\vec{f}_V$  au repos dans un référentiel galiléen.

Principe fondamental de la statique des fluides :

$$\vec{f}_V - \vec{\text{grad}} P = \vec{0}$$

## II Cas du fluide homogène incompressible

### 1 Loi fondamentale de l'hydrostatique

Le fluide incompressible a une masse volumique  $\rho$  constante indépendante de la pression et de la température. Nous étudions le champ de pression d'un fluide dans le seul champ de pesanteur uniforme :

$$P(z) + \rho g z = \text{cste}$$

avec l'axe des  $z$  vertical ascendant.

### 2 Conséquences et applications

La surface libre d'une liquide est horizontale.

La différence de pression entre deux points d'un même liquide ne dépend que de la dénivellation :

$$P_B - P_A = \rho g(z_A - z_B)$$

Applications :

- ★ Mesure de pression, baromètre de Torricelli.

- ★ Vases communicants.
- ★ Presses hydrauliques

### III Équilibre de l'atmosphère isotherme

#### 1 Modèle

- Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est uniforme.
- Le champ de température est uniforme.
- L'air est assimilé à un mélange de gaz parfaits.  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$
- L'atmosphère est à l'équilibre thermodynamique.

#### 2 Champ de pression

D'après le principe fondamental de la statique des fluides :

$$\rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$$

Soit  $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ , avec l'axe des  $z$  vertical ascendant.

D'après l'équation des GP :  $PV = nRT$  ou  $PM = \rho RT$ . Il vient :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz.$$

On en déduit :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

avec  $H = \frac{RT}{Mg} \simeq 8 \text{ km}$ , hauteur d'échelle.

### 3 Interprétation statistique : facteur de Boltzmann

On note  $E_p$  l'énergie potentielle d'une molécule d'air :  $E_p(z) = mgz$ .  
Soit  $n^*(z)$  la densité moléculaire à l'altitude  $z$  :

$$n^*(z) = n^*(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) = n^*(0) \exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right)$$

Dans un système macroscopique en équilibre à la température  $T$ , la probabilité de trouver une particule donnée dans un état d'énergie  $\mathcal{E}$  est proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right) = \text{facteur de Boltzmann}.$$

Les niveaux les plus peuplés sont les niveaux de plus basse énergie.