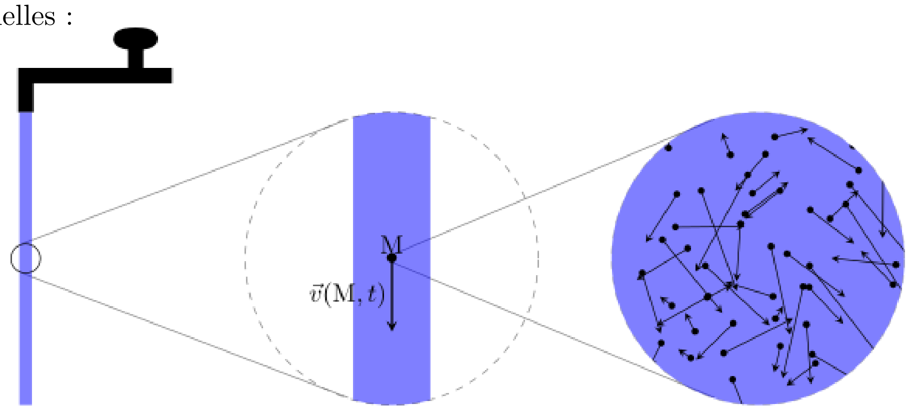
Cinématique des fluides

I Modèle continu des fluides

1. La particule de fluide

Les différentes échelles :



Échelle macroscopique L Échelle mésoscopique ℓ Échelle microscopique λ

2. Approximation des milieux continus

Lorsque l'échelle mésoscopique est concevable, le fluide est étudié comme un milieu continu au sein duquel les grandeurs varient continûment.

II Description d'un fluide en écoulement

1. Deux approches possibles

Deux approches différentes existent. Le point de vue de Lagrange consiste à s'intéresser à la trajectoire des particules de fluide. Celui d'Euler se concentre sur l'évolution des propriétés du fluide en différents points et au cours du temps.

a. La description lagrangienne

Joseph Louis de Lagrange, né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome sarde naturalisé français.

Dans le **formalisme lagrangien**, on étudie le mouvement d'une particule de fluide $\mathscr{F}$ que l'on suit au cours du temps.

On appelle **trajectoire** d'une particule de fluide la courbe décrite par la particule de fluide au cours de temps dans le référentiel d'étude.

b. La description eulérienne

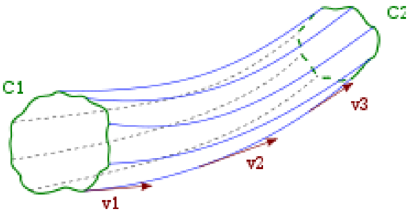
Leonhard Euler, né à Bâle (Suisse) en 1707 et mort à Saint-Pétersbourg en 1783, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne.

En mécanique des fluides, la description eulérienne consiste à suivre en chaque point fixe de l'espace l'évolution au cours du temps des grandeurs macroscopiques locales (masse volumique, vitesse...)

2. Lignes de courant et tubes de champ

On appelle **ligne de courant** une courbe tangente en chacun de ses points au champ des vitesses.

On appelle **tube de courant** toute surface formée de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



https://fr.wikipedia.org/wiki/Ligne_de_courant

Exemple : on considère le champ de vitesse bidimensionnel suivant :

$$\overrightarrow{v}(x,y,t) = Axt\overrightarrow{e_x} - Byt^2\overrightarrow{e_y}$$

avec $A = 0,2$ s^{-2} et $B = 0,1$ s^{-3}.

On se place à l'instant $t_1 = 1$ s.

Équation des lignes de champ :

$$\frac{dx}{Axt_1} = -\frac{dy}{Byt_1^2}$$

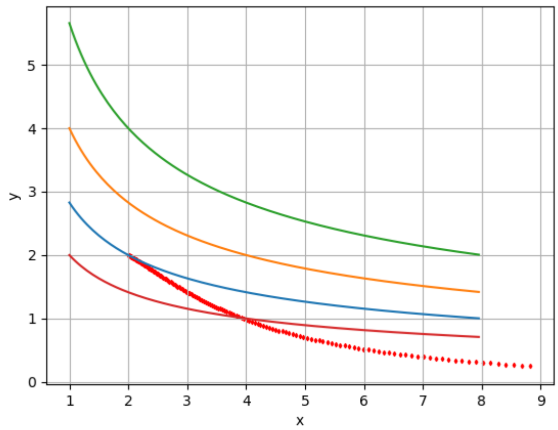
Soit

$$yx^{\frac{Bt_1}{A}} = \text{cste}$$

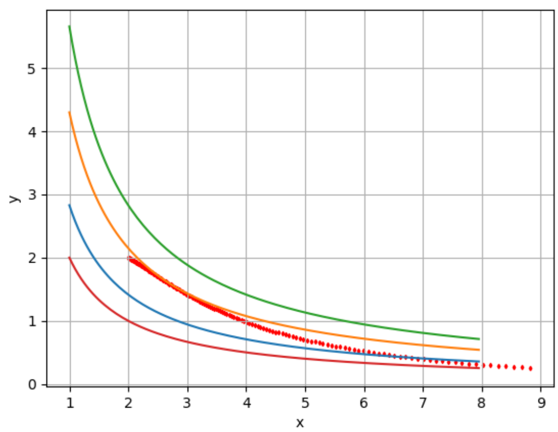
On considère une particule P_1 qui se trouve à l'instant t_1 au point (2,2). On représente en diamants rouges sa trajectoire entre t_1 et $t_3 = 4$ s.

La ligne de courant qui passe par la particule à l'instant t_1 a pour équation $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}}$.
À l'instant $t_2 = 2$ s, les lignes de courant ont pour équation :

$$y = \frac{\text{cste}}{x}$$



Lignes de champ à $t_1 = 1$ s



Lignes de champ à $t_2 = 2$ s

3. Dérivée particulaire d'un champ eulérien

a. Dérivée particulaire de la masse volumique (champ scalaire)

On cherche à exprimer la variation temporelle de la masse volumique d'une particule de fluide en fonction du champ eulérien des masses volumiques $\mu(M,t)$.

$$\frac{D\mu}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\mu(x + v_x\delta t, y + v_y\delta t, z + v_z\delta t, t + \delta t) - \mu(x,y,z,t)}{\delta t}$$

$$\boxed{\frac{D\mu}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\mu}_{\text{dérivée convective}}}$$

b. Accélération particulaire

$\vec{a}(M,t)$ = champ eulérien des accélérations,
$\vec{A}_{\mathscr{F}}(t)$ = accélération de la particule de fluide $\mathscr{F}$ en M à l'instant t.
On a : $\vec{A}_{\mathscr{F}}(t) = \vec{a}(M,t)$.

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt}(M,t) = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\left(\vec{v}(M,t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(M,t)}_{\text{accélération convective}}}$$

$\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ = accélération locale
$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ = accélération convective

Remarque : $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\dfrac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v}$

Application : écoulement de cisaillement.
Soit un écoulement tel que $\vec{v}(M,t) = f(y,t)\vec{u_x}$, avec $f(y,t)$ une fonction de y et du temps. Montrer que $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{0}$.

c. Dérivée particulaire

Soit $g(M,t) = g(x,y,z,t)$, une grandeur intensive scalaire (ou vectorielle $\vec{g}(x,y,z,t)$), définie en tout point et à chaque instant. Soit $\mathscr{F}$ une particule de fluide qui se trouve à l'instant t en M : $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$. À l'instant $t + \delta t$ $\mathscr{F}$ se trouve en M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{V_{\mathscr{F}}}(t)\delta t = \vec{r} + d\vec{r}$ avec $\vec{V_{\mathscr{F}}}(t) = \vec{v}(M,t)$.
En suivant la particule de fluide entre t et $t + \delta$t, g varie de $g(\vec{r} + \vec{dr}, t + \delta t) - g(\vec{r}, t)$.

On appelle **dérivée particulaire** de g la grandeur :

$$\frac{Dg}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{g(\vec{r} + \vec{dr}, t + \delta t) - g(\vec{r}, t)}{\delta t}$$

$$\boxed{\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) g}$$

Opérateur $\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)$:

En coordonnées cartésiennes, on a $\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{u}_x + v_y\overrightarrow{u}_y + v_z\overrightarrow{u}_z$ et $\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u}_y + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u}_z$ d'où

$$(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}) = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

III Conservation de la masse

1. Les débits

a. Le débit massique

Soit $\mathcal{S}$ une surface orientée. Le débit massique à travers $\mathcal{S}$ est la masse δm de fluide qui passe à travers $\mathcal{S}$ par unité de temps :

$$\boxed{D_m(\mathcal{S},t) = \frac{\delta m}{dt}}$$

$D_m(\mathcal{S},t)$ s'exprime en kg.s^{-1}, c'est une grandeur algébrique.

b. Le débit volumique

Soit $\mathcal{S}$ une surface orientée. Le débit volumique à travers $\mathcal{S}$ est le volume δV de fluide qui passe à travers $\mathcal{S}$ par unité de temps :

$$\boxed{D_V(\mathcal{S},t) = \frac{\delta V}{dt}}$$

2. Vecteur densité de courant de masse

On appelle vecteur densité de courant de masse le vecteur

$$\overrightarrow{j_m}(M,t) = \mu(M,t)\overrightarrow{v}(M,t)$$

Le débit massique à travers un surface $\mathcal{S}$ est égal au flux du vecteur densité de courant de masse $\overrightarrow{j}_m$ à travers cette surface :

$$D_m(\mathcal{S},t) = \iint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{j_m}(M,t)\cdot\overrightarrow{dS_M}$$

Remarque : le débit volumique à travers une surface est le flux du champ des vitesse à travers cette surface.

Application : On considère l'écoulement unidimensionnel d'un gaz dans un tuyau cylindrique de diamètre $d = 2$ cm. À travers une section du tuyau passe la masse $M = 510$ g de gaz en demi-heure. Quel est le débit massique ?
La masse volumique $\mu_g = 0,75$ kg.m^{-3} est supposée constante et uniforme. En déduire la vitesse d'écoulement du gaz.

3. Équation de conservation de la masse

a. À 1 dimension

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j_m}{\partial x}(x,t) = 0$$

b. Généralisation

Équation de conservation de la masse ou équation de continuité :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{j_m} = 0}$$

Or $\overrightarrow{j_m} = \mu \overrightarrow{v}$, $\operatorname{div} \vec{j_m} = \mu \operatorname{div} \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\mu$.

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \mu \overrightarrow{v} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div} \overrightarrow{v} = 0$$

c. Interprétation

$$\operatorname{div} \overrightarrow{v} = \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt}$$

avec V volume d'une particule de fluide que l'on suit.

4. Débit et conditions aux limites

IV Écoulements particuliers

1. Écoulement stationnaire

Un écoulement est stationnaire dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$ si les champs eulériens du fluide sont indépendants du temps. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Cette propriété dépend du référentiel d'étude.

Exemple : sillage d'un bateau

Dans le référentiel du bateau le sillage est stationnaire alors qu'il ne l'est pas dans le référentiel de la rive.

Les propriétés

- Les lignes de courant ne varient pas au cours du temps.
- Les trajectoires des particules de fluide sont confondues avec les lignes de courant.
- Le vecteur densité de courant de masse est à flux conservatif.
- Le débit massique à travers toute surface fermée est nul.
- Le débit massique à travers toute section d'un tube de courant est constant.

2. Écoulement incompressible

a. Définition

Un fluide est en écoulement incompressible si les particules de fluide ont un volume constant au cours de leur déplacement. On a alors

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{v} = 0 \text{ ou } \frac{D\mu}{Dt} = 0}$$

b. Écoulement ou fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est fixée et ne dépend pas de la pression. En règle générale, les liquides peuvent en première approximation être considérés comme incompressibles : $\mu = \text{cste}$.

On admet que les écoulements gazeux peuvent être assimilés à des écoulements incompressibles si la vitesse du fluide en tout point est faible devant la vitesse de propagation du son dans ce même fluide.

c. Propriétés

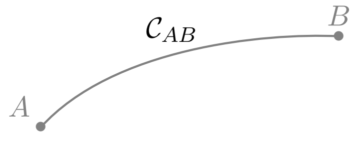
Dans un écoulement incompressible la vitesse est à flux conservatif.
Le débit volumique à travers tout surface fermée est nul.
Le débit volumique à travers tout section d'un tube de courant est constant. Lorsque les lignes de courant se resserrent, la vitesse du fluide augmente.

3. Rotationnel d'un champ de vecteurs

a. Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Circulation sur un segment Soit $\mathcal{C}_{AB}$ un segment de courbe limité par les points A et B ; la circulation du champ de vecteurs $\vec{a}$ sur $\mathcal{C}_{AB}$ est :

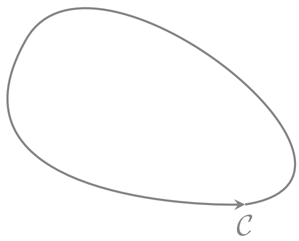
$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \overrightarrow{a}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$$



Circulation sur une courbe fermée Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée orientée ; la circulation du champ de vecteurs $\vec{a}$ sur $\mathcal{C}$ est :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{a}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

Le symbole $\oint$ signifie que le point M effectue un tour sur la courbe fermée.

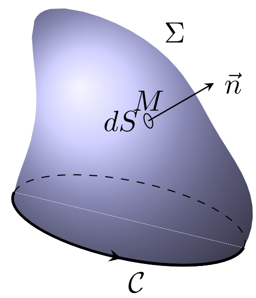


b. Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface ouverte

Soit Σ une surface ouverte de bord $\mathcal{C}$; la courbe $\mathcal{C}$ étant orientée, le flux du champ $\vec{a}$ à travers la surface est l'intégrale :

$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \overrightarrow{a}(M) \cdot \overrightarrow{n}\ dS$$

où $\overrightarrow{n}$ est orientée par la "règle du tire-bouchon".



c. Définition

L'opérateur rotationnel transforme un champ de vecteurs $\overrightarrow{a}$ en champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a}$:

$$\delta\mathcal{C}_M = \oint_{M\in\Gamma} \overrightarrow{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\ell}_M = (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a}(M)) \cdot \overrightarrow{dS}_M$$

Le rotationnel possède donc une signification intrinsèque : c'est une densité surfacique de circulation. En choisissant une surface Σ infinitésimale autour d'un point M, on peut exprimer le rotationnel dans un système de coordonnées quelconque.

d. Expressions du rotationnel

On montre, en calculant la circulation le long de petits rectangles de côtés (dx, dy) (dy, dz) et (dz, dx) ayant pour coin le point $M(x, y, z)$, que l'expression en coordonnées cartésiennes du rotationnel est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

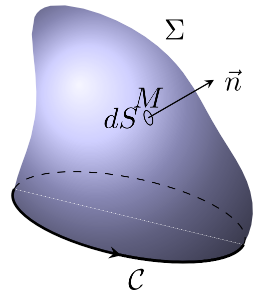
En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, a_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi}\right)\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\phi} - \frac{\partial (r a_\phi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_\phi}$$

e. L'opérateur "nabla"

f. Théorème de Stokes

La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée orientée $\mathcal{C}$ limitant une surface ouverte Σ est égale au flux à travers Σ du rotationnel de $\vec{a}$:



$$\iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a}(M)\cdot\vec{n}\,dS_M = \oint_{M\in\mathcal{C}} \vec{a}(M)\cdot\overrightarrow{d\ell}_M$$

4. Écoulement tourbillonnaire

a. Vecteur tourbillon

On appelle vecteur tourbillon d'un écoulement le vecteur :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$$

Remarque : $\text{div}\,\vec{\Omega} = 0$.

Le vecteur tourbillon décrit la rotation locale des particules de fluide.

Un écoulement est dit tourbillonnaire lorsque $\vec{\Omega} \neq 0$.

b. Exemples

5. Écoulement irrotationnel

a. Définition

Un écoulement est dit irrotationnel si le vecteur tourbillon est nul en tout point du fluide.

Cette propriété dépend du référentiel d'étude.

b. Écoulement potentiel

Un écoulement irrotationnel est également qualifié d'écoulement potentiel car il existe un potentiel scalaire $\Phi(M,t)$ appelé potentiel des vitesse tel que :

$$\vec{v}(M,t) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi(M,t)$$

c. Écoulement irrotationnel incompressible

Écoulement irrotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$.

Écoulement incompressible : $\text{div}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi) = 0$.

Dans un écoulement irrotationnel incompressible, le potentiel vitesse Φ obéit à l'équation de Laplace

$$\Delta\Phi = 0$$

V Annexe

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def v(x,y,t):
    A = 0.2
    B = 0.1
    vx = A * x * t
    vy = -B * y * t**2
    return vx, vy

x0 = 2.
y0 = 2.

xcur = x0
ycur = y0
nt = 3000
xpos = np.zeros( nt, dtype=float)
ypos = np.zeros_like(xpos)
xarr = np.arange(0.5, 8.,0.05)
yarr1 = 2.*np.sqrt(2./xarr)
yarr2 = 2.*np.sqrt(4./xarr)
yarr3 = 2.*np.sqrt(8./xarr)
yarr4 = 2.*np.sqrt(1./xarr)
dt = 1.e-3
for it in range(nt):
    xpos[it] = xcur
    ypos[it] = ycur
    t = 1. + float(it) * dt
    vx, vy = v( xcur, ycur, t)
    xnew = xcur + vx * dt
    ynew = ycur + vy * dt
    xcur = xnew
    ycur = ynew

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(xarr,yarr1)
ax.plot(xarr,yarr2)
ax.plot(xarr,yarr3)
ax.plot(xarr,yarr4)
ax.scatter(xpos[::20], ypos[::20], marker='d', s=4, c='r')
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
plt.grid()
plt.show()
```