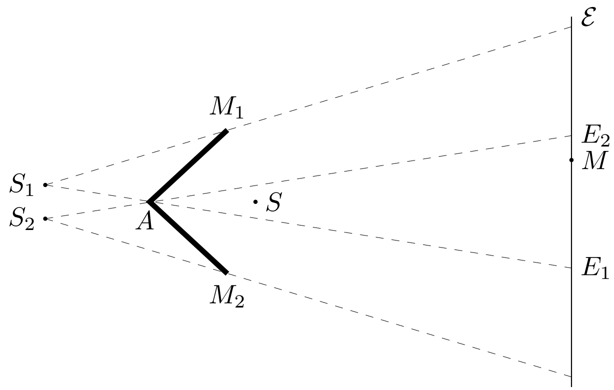
Semaine de colle n^o 10

Question de cours : Interféromètre de Michelson

Architecture. Rôle de la compensatrice. Système fictif équivalent.

Dispositif interférentiel à 2 miroirs

On considère le montage suivant, constitué de deux miroirs plans M_1 et M_2 placés dans l'air et formant un dièdre d'angle $A = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, avec $\alpha \ll 1$.



Une source lumineuse S ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ_0 est placée dans le plan bissecteur du dièdre formé par les miroirs ; à une distance R de l'arête du dièdre. Soient S_1' l'image de S donnée par M_1 et S_2' l'image de S par M_2. On note S_2 l'image de S_1' par M_2 et S_1 l'image de S_2' par M_1. Tout se passe comme si les deux sources secondaires émettaient deux ondes cohérentes susceptibles d'interférer : les franges d'interférences sont observées sur un écran $\mathcal{E}$ perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre et placé à une distance d du point A avec $d > R$.

1. Représenter la marche de deux rayons lumineux issus de S qui viennent interférer au point M. Le dispositif fonctionne-t-il par division du front d'onde ?

2. Montrer que l'angle $\widehat{S_1AS_2}$ est égal à 4α ; en déduire la distance $a = S_1S_2$.

3. Donner l'expression de l'interfrange i en fonction de λ_0, d, R et α.

4. Donner l'expression de la largeur E_1E_2 du champ d'interférences incercepté par l'écran $\mathcal{E}$ et préciser le nombre N de franges brillantes visibles sur l'écran.

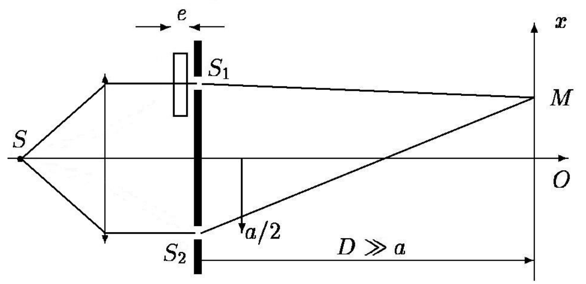
5. Calculer numériquement i, a, E_1E_2 et N pour $\lambda_0 = 0,60$ μm, $\alpha = 2,0.10^{-3}$ rad, $R = 10$ cm et $d = 70$ cm.

Question de cours : Michelson en lame d'air

Montage équivalent. Surface de localisation. Calcul de la différence de marche. Étude du rayon des anneaux, effet d'une variations de e.

Frange achromatique

La figure ci-dessous représente le dispositif des fentes d'Young. Devant la fente S_1, on place une lame de verre d'indice n et d'épaisseur e.



1. La source S est une source monochromatique de longueur d'onde λ ; calculer la position x_0 de la frange brillante d'ordre 0.

2. La source S émet maintenant un spectre continu de longueur d'onde moyenne λ ; calculer en fonction de D, e, a, n et $\dfrac{dn}{d\lambda}$ la position x_1 de la frange brillante achromatique, c'est-à-dire la frange brillante pour toutes les longueurs d'onde émises par S.

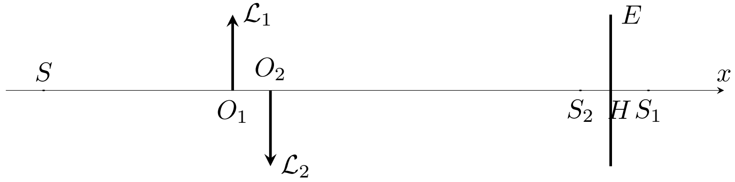
Semaine de colle n^o 10

Question de cours : Michelson en coin d'air

Description du dispositif. Localisation de la figure d'interférence en source étendue. Expression de la différence de marche. Figure d'interférence.

Bilentilles de Meslin

Une lentille convergente $(\mathcal{L})$ de centre O, d'axe Ox, de distance focale $f = 0{,}5$ m, de rayon d'ouverture $h = 4$ cm, est coupée en deux parties égales $(\mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{L}_2)$ suivant un diamètre. Le centre O est ainsi dissocié en deux points O_1 et O_2. On fait subir à $(\mathcal{L}_2)$ une translation le long de l'axe Ox telle que $e = \|\overrightarrow{O_1O_2}\|.\overrightarrow{e_x} = 5$ mm.



On éclaire le dispositif par une source ponctuelle S émettant une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}449$ μm placée sur Ox en un point S tel que $\overrightarrow{SO_1}.\overrightarrow{e_x} = 0{,}75$ m. Soient S_1 et S_2 les images de S données respectivement par $(\mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{L}_2)$.

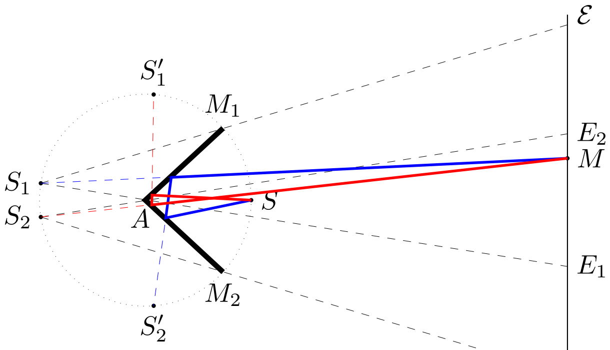
1. Déterminer les positions de S_1 et S_2.
2. (a) Déterminer le champ d'interférence.
   (b) L'observation ayant lieu sur un écran (E) perpendiculaire à Sx, déterminer les limites du champ d'interférence en fonction de la distance $d = \overrightarrow{S_2H}.\overrightarrow{e_x}$.

   Pour quelle valeur de d le champ est-il le plus large ?
3. (a) Calculer la différence de marche entre deux rayons lumineux interférant en un point M. On admettra qu'un rayon lumineux issu de S subit une avance de marche égale à $\lambda/2$ quand il passe par l'image de S donnée par $(\mathcal{L}_1)$ ou $(\mathcal{L}_2)$.
   (b) Quelles sont les surfaces d'égale différence de marche ? Montrer que l'on observe dans (E) des franges semi-circulaires.
   (c) Pour quelle position de (E) une frange d'ordre d'interférence donné a-t-elle un rayon maximum ? Déterminer alors le rayon des anneaux sombres. Quel est le nombre de franges sombres observables dans le champ ?

Semaine de colle n^o 10

1. Les points S_1', S_2', S_1 et S_2 sont situés sur le cercle de centre A et de rayon R ; leurs positions sont déterminées par leurs angles polaires :

$$\begin{aligned} S_1' :\quad & \theta_1' = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ S_2' :\quad & \theta_2' = -\frac{\pi}{2} + \alpha \\ S_1 :\quad & \theta_1 = \pi - 2\alpha \\ S_2 :\quad & \theta_2 = \pi + 2\alpha \end{aligned}$$



2. $\widehat{S_1AS_2} = \theta_2 - \theta_1 = 4\alpha$. On en déduit que

$$a = S_1S_2 = 2R\sin 2\alpha \simeq 4R\alpha$$

dans l'approximation des angles petits.

3. Les sources secondaires sont à une distance $D = d + R$ du plan $\mathcal{E}$. La différence de marche est

$$\delta = \|\overrightarrow{S_2M}\| - \|\overrightarrow{S_1M}\|$$

avec

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{S_2M}\| &= \sqrt{(x+2R\alpha)^2 + y^2 + D^2} \\ &= D\sqrt{1 + \frac{(x+2R\alpha)^2 + y^2}{D^2}} \\ &\simeq D\left(1 + \frac{(x+2R\alpha)^2 + y^2}{2D^2}\right) \end{aligned}$$

De même

$$\|\overrightarrow{S_1M}\| \simeq D\left(1 + \frac{(x-2R\alpha)^2 + y^2}{2D^2}\right)$$

On en déduit

$$\delta = \frac{4R\alpha x}{D} = \frac{4R\alpha x}{d+R}$$

L'interfrange est déterminée par

$$\lambda_0 = \frac{4R\alpha i}{d+R} \text{ soit } i = \frac{\lambda_0(d+R)}{4R\alpha}$$

4. La largeur du champ d'interférence est

$$E_1E_2 = 4\alpha d$$

La valeur maximale de x est donc

$$x_{max} = 2\alpha d$$

L'ordre d'interférence maximal est

$$p_{max} = \frac{x_{max}}{i} = \frac{8Rd\alpha^2}{\lambda_0(d+R)}$$

Le nombre de franges brillantes est

$$N = 1 + 2E(P_{max}) = 1 + E\left(\frac{8Rd\alpha^2}{\lambda_0(d+R)}\right)$$

5. Numériquement, on obtient

$$\begin{aligned} i &= 0,60 \text{ mm} \\ a &= 0,80 \text{ mm} \\ E_1E_2 &= 5,6 \text{ mm} \\ N &= 1 + E(4,65) = 9 \end{aligned}$$

 Semaine de colle n^o 10

1. En l'absence de lame, la différence de marche est

$$\begin{aligned}
\delta(M) &= S_2M - S_1M \\
&= \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \\
&= D\sqrt{1 + \frac{1}{D^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)^2} - D\sqrt{1 + \frac{1}{D^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \\
&\simeq D\left(1 + \frac{1}{2D^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2D^2}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2D}(2ax) \\
&= \frac{ax}{D}
\end{aligned}$$

En présence de lame, le chemin optique sur la voie 1 devient

$$(S_1M) = S_1M + (n-1)e$$

La différence de marche devient alors

$$\delta(M) = \frac{ax}{D} + (1-n)e$$

La frange d'ordre 0 est à l'abscisse x_0 telle que

$$0 = \frac{ax_0}{D} + (1-n)e \text{ soit } x_0 = (n-1)\frac{eD}{a}$$

2. La frange d'ordre p est à l'abscisse x_p telle que

$$p\lambda = \frac{ax_0}{D} + (1-n)e \text{ soit } x_p = (n-1)\frac{eD}{a} + p\frac{\lambda D}{a}$$

x_p dépend de λ ; sa dérivée est

$$\frac{dx_p}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda}\frac{eD}{a} + p\frac{D}{a}$$

La frange achromatique est telle que

$$\frac{dx_p}{d\lambda} = 0 \text{ soit } p = -e\frac{dn}{d\lambda}$$

soit

$$x_p = \left(n - 1 - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\frac{eD}{a}$$

Cette frange n'est généralement pas une frange brillante. La frange brillante achromatique est la frange brillante qui réalise au mieux cette condition de façon approchée ; p est l'entier le plus proche de $-e\dfrac{dn}{d\lambda}$, soit

$$p = E\left(-e\frac{dn}{d\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

et finalement

$$x_{achro,bril} = \left(n - 1 + E\left(-e\frac{dn}{d\lambda} + \frac{1}{2}\right)\right)\frac{eD}{a}$$

 Semaine de colle n^o 10

1. Les relations de conjugaison longitudinales s'écrivent

$$\frac{1}{\overline{O_1S_1}} - \frac{1}{\overline{O_1S}} = \frac{1}{f} \text{ soit } \overline{O_1S_1} = \frac{1}{\dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{\overline{O_1S}}} = 1,500 \text{ m}$$

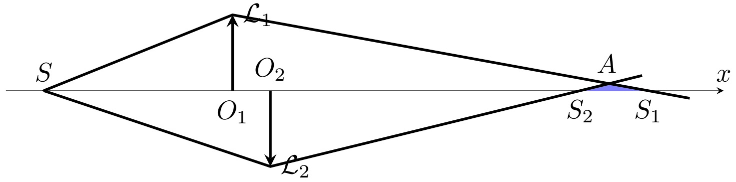
et

$$\frac{1}{\overline{O_2S_2}} - \frac{1}{\overline{O_2S}} = \frac{1}{f} \text{ soit } \overline{O_2S_2} = \frac{1}{\dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{\overline{O_2S}}} = 1,480 \text{ m}$$

On en déduit que

$$\overline{S_2S_1} = 15 \text{ mm}$$

2. a) Le champ d'interférence est à l'intersection des faisceaux passant par la demi-lentille $\mathcal{L}_1$ et par la demi-lentille $\mathcal{L}_2$.



b) Entre x_{S_2} et x_A, c'est le rayon S_2A qui limite le champ d'interférence ; entre x_A et x_{S_1}, c'est le rayon AS_1 qui limite le champ d'interférence.
La pente de S_2A est $\alpha_2 = \dfrac{h}{\overline{O_2S_2}}$, tandis que la pente de S_1A est $\alpha_1 = -\dfrac{h}{\overline{O_1S_1}}$; le champ est le plus large à l'intersection de ces deux droites, soit, en remarquant que $\alpha_1 \simeq -\alpha_2$, pratiquement au milieu de S_2S_1. On a alors $d = d_0 = 7,5$ mm.
La largeur du champ d'interférence est alors

$$\ell_0 \simeq \alpha_1 \frac{S_2S_1}{2} = 2,0.10^{-4} \text{ m}$$

3. a) En un point M du champ d'interférence, le rayon de la voie 2 est passé par le point S_2, mais le rayon de la voie 1 n'est pas passé par le point S_1. La dfférence de marche est donc

$$\delta = \delta_g - \frac{\lambda}{2}$$

où δ_g est la différence de marche géométrique :

$$\begin{aligned}\delta &= (SS_2M) - (SS_1M) \\ &= (SS_2) - (SS_1) + S_2M + S_1M\end{aligned}$$

D'après le théorème de Malus, (SS_2) et (SS_1) sont indépendants du rayon emprunté pour joindre S à S_2 ou à S_1 On en déduit que $(SS_2) - (SS_1)$ est une constante, que l'on peut identifier à $\overline{S_1S_2}$ en prenant le cas particulier d'un rayon sur l'axe. La différence de marche est donc finalement

$$\delta = \overline{S_1S_2} - \frac{\lambda}{2} + S_2M + S_1M$$

b) Une frange est un ensemble de points tel que $\delta = $ Cte, donc tel que $S_2M + S_1M =$ Cte, ce qui caractérise des ellipsoïdes de révolution de foyers S_1 et S_2.
Leur intersection par un plan $x =$ Cte donne des cercles, mais seul le demi-cercle supérieur est dans le champ d'interférence. On observe donc des franges en forme de demi-cercles.
c) Le rayon d'une frange d'ordre donné est maximal si le plan de l'écran est le plan médiateur de S_1S_2. Dans ce cas, $S_2M = S_1M$. En particulier, sur l'axe,

$$\delta = 2S_2M + \overline{S_1S_2} - \frac{\lambda}{2} = -\frac{\lambda}{2}$$

Le point sur l'axe est donc une frange sombre.
A une distance r de l'axe,

$$\delta = 2S_2M + \overline{S_1S_2} - \frac{\lambda}{2} = 2\sqrt{d_0^2 + r^2} - 2d_0 - \frac{\lambda}{2}$$

Dans l'approximation de Gauss, on en déduit

$$\delta = 2d_0\left(1 + \frac{r^2}{2d_0^2}\right) - 2d_0 - \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{d_0} - \frac{\lambda}{2}$$

Les anneaux sombres sont tels que

$$\frac{r_k^2}{d_0} = k\lambda \text{ soit } r_k = \sqrt{k\lambda d_0}$$

A la limite du champ d'interférence, $r = \ell_0$, donc

$$k < \frac{\ell_0^2}{\lambda d_0} = 11,9$$

On voit donc 11 anneaux sombres dans le champ d'interférence. Le bord du champ d'interférence est pratiquement sombre.