Cinématique des fluides

Applications directes des cours

$\boxed{1}$ Soit une canalisation à section circulaire de rayon $R = 5$ cm dans laquelle s'écoule de l'eau à la vitesse $v = 1$ m.s^{-1}. Calculer la masse d'eau qui traverse une section de cette canalisation en $\tau = 10$ minutes.

$\boxed{2}$ L'écoulement entre un plan oscillant ($y = 0$) et l'infini ($y \to \infty$) est donné par le champ eulérien des vitesses suivant : $\vec{v}(\vec{r}, t) = A \exp(-ky) \cos(\omega t - ky) \vec{u}_x$. Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ?

$\boxed{3}$ Pour chacun des trois champs eulériens de vitesse ci-dessous, où a, b et c sont des constantes positives, répondre aux questions suivantes.

(1) $v_x = ax \qquad v_y = ay$
(2) $v_x = by \qquad v_y = bx$
(3) $v_x = -cy \qquad v_y = cx$

1. Dessiner les lignes de champ et calculer leur équation.
2. L'écoulement est-il incompressible ?
3. L'écoulement est-il potentiel ? Si oui, trouver un potentiel des vitesses associé.
4. Exprimer l'accélération d'une particule de fluide.
5. Représenter l'évolution d'une particule carrée de côtés ℓ ($x \in [0, \ell], y \in [0, \ell]$) entre les instants t et t + dt et caractériser cette évolution en terme de déformation, dilatation, contraction, rotation, ...

$\boxed{4}$ Soit un écoulement de fluide incompressible dans une conduite possédant un rétrécissement. La section de la conduite diminue de S_1 à S_2. La vitesse est supposée uniforme sur une section, v_1 au niveau de S_1 et v_2 au niveau de S_2. Quelle relation lie S_1, S_2, v_1 et v_2 ? Tracer l'allure des lignes de courant. Commenter.

$\boxed{5}$ Écrire les équations locales régissant le champ des vitesses dans un fluide incompressible lors d'un écoulement potentiel.

$\boxed{6}$ On s'intéresse à une tornade :

$$\begin{cases} \vec{v} = r\Omega \vec{u}_\theta & \text{pour r < a} \\ \vec{v} = \dfrac{a^2\Omega}{r} \vec{u}_\theta & \text{pour r > a} \end{cases}$$

Calculer le rotationnel de la vitesse puis calculer la circulation de $\vec{v}$ le long d'un cercle $\mathscr{C}$ d'axe Oz de rayon r orienté dans le sens trigonométrique.

On donne $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v}) = -\dfrac{\partial\, v_\theta}{\partial\, z} \vec{e_r} + \frac{1}{r} \dfrac{\partial\, r v_\theta}{\partial\, r} \vec{e_z}$.

$\boxed{2}$ div $(\vec{v}) = 0$, écoulement incompressible. $\boxed{3}$ Écoulement (1) : lignes de courant = demi-droites issues de O ; div $(\vec{v}) = 2a$, compressible ; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v}) = \vec{0}$, irrotationnel, $\Phi = \frac{a}{2}(x^2+y^2)$; $\vec{a} = a^2(x\vec{u_x} + y\vec{u_y})$. Écoulement (2) : lignes de courant $x^2 - y^2$ =cte ; div $(\vec{v}) = 0$, incompressible ; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, v = \vec{0}$, irrotationnel, $\Phi = bxy$; $\vec{a} = b^2(x\vec{u_x} + y\vec{u_y})$. Écoulement (3) : lignes de courant = $x^2 + y^2$ =cste, cercle de centre O ; div $(\vec{v}) = 0$, incompressible ; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, v = 2c\vec{u_z}$, tourbillonnaire ; $\vec{a} = -c^2(x\vec{u_x} + y\vec{u_y})$. $\boxed{4}$ Conservation du débit volumique : $S_1 v_1 = S_2 v_2$. $\boxed{5}$ div $(\vec{v}) = 0$, incompressible ; écoulement potentiel, $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$, irrotationnel ; $\Delta\Phi = 0$. $\boxed{6}$ Pour $r < a$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v}) = 2\Omega\vec{u_z}$ et $\mathcal{C} = 2\pi r^2 \Omega$, pour $r > a$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\mathcal{C} = 2\pi a^2 \Omega$.

Exercices

1. Écoulement à l'intérieur d'un dièdre droit

Soit, dans la région $x > 0$, $y > 0$ l'écoulement défini par : $\overrightarrow{v} = k(-x\overrightarrow{e_x} + y\frac{t}{t_0}\overrightarrow{e_y})$, où k est une constante positive.
Ce champ des vitesses correspond à un écoulement d'un fluide parfait, les plans $x = 0$ et $y = 0$ jouant le rôle de parois.

1. Cet écoulement est-il compatible avec un fluide incompressible ? Est-il irrotationnel ?
2. Déterminer l'équation des lignes de courant.
3. Les lignes de courant sont-elles confondues avec les trajectoires des particules de fluide ?
4. Calculer l'accélération $\overrightarrow{a}$ en chaque point de l'écoulement en utilisant la description eulérienne du fluide et l'expression de la dérivée particulaire.

2. Écoulement entre deux cylindres

On considère un fluide s'écoulant entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tournant autour de leur axe aux vitesses angulaires ω_1 et ω_2. Le champ des vitesses en coordonnées cylindriques a pour expression : $\overrightarrow{v}(M,t) = (Ar + \frac{B}{r})\overrightarrow{u}_\theta$.

1. Caractériser complètement cet écoulement (compressible ou non ? stationnaire ou non ? etc...).
2. Déterminer l'expression du débit volumique à travers une section de hauteur h perpendiculaire à l'écoulement.
3. Déterminer l'accélération du fluide.
4. Déterminer les constantes A et B en écrivant la continuité des vitesses du fluide et des cylindres.
5. Commenter le cas $\omega_1 = \omega_2$.

On donne en repère cylindrique :

$$\text{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_r)}{\partial\,r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,v_\theta}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,v_z}{\partial\,\theta} - \frac{\partial\,v_\theta}{\partial\,z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial\,v_r}{\partial\,z} - \frac{\partial\,v_z}{\partial\,r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_\theta)}{\partial\,r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\,v_r}{\partial\,\theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

3. Écoulement bidimensionnel

On considère un écoulement bidimensionnel de fonction potentiel

$$\Phi(r,\theta) = U\theta$$

en coordonnées cylindriques.

On rappelle :

$$\text{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_r)}{\partial\,r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,v_\theta}{\partial\,\theta} + \frac{\partial\,v_z}{\partial\,z}$$

1. (a) Déterminer les lignes équipotentielles de cet écoulement.
   (b) Déterminer le champ des vitesses $\overrightarrow{v}$.
   (c) L'écoulement est-il incompressible ?
2. Calculer la circulation du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$:
   (a) sur une courbe (Γ) n'entourant pas l'origine ;
   (b) sur une courbe (Γ') entourant l'origine.
3. Déterminer le champ des accélérations dans cet écoulement.

4. Écoulement autour d'une sphère

Un fluide infini s'écoule en régime permanent incompressible et irrotationnel autour d'une sphère de rayon R et de centre O. Loin de la sphère, la vitesse du fluide est $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{u}_z$. Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) par rapport à l'axe Oz passant par le centre de la sphère.

1. Existe-t-il un potentiel des vitesses ? Quelle équation doit-il vérifier ?
2. Montrer que les trois potentiels suivants sont solutions de l'équation ci-dessus :

$$\Phi_1 = \alpha r \cos\theta \ ; \ \Phi_2 = \frac{\beta}{r} \ ; \ \Phi_3 = \frac{\gamma \cos\theta}{r^2}$$

3. On suppose que la solution générale s'écrit sous la forme $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$. Déterminer complètement le champ de vitesse.
4. Existe-t-il un point où la vitesse est nulle (point d'arrêt) ?
5. Déterminer la vitesse à la surface de la sphère. En quel point la vitesse est-elle maximum ? Commenter.

On donne, en coordonnées sphériques :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

5. Débit-volume d'un écoulement de Poiseuille

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une canalisation cylindrique d'axe Oz, de rayon a dont le profil des vitesses est donné en un point $M(r, \theta, z)$ par :

$$\overrightarrow{v}(M) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \overrightarrow{u}_z$$

où v_0 est la vitesse sur l'axe de la conduite, qui dépend du rayon a, de la viscosité dynamique du fluide η et du gradient longitudinal de pression $\left|\frac{dP}{dz}\right|$ supposé constant.
Ce type d'écoulement est appelé écoulement de Poiseuille.

1. Sachant que le coefficient η s'exprime dans le système international d'unités en Pa.s, déterminer par analyse dimensionnelle, à un facteur numérique de proportionnalité près noté K, l'expression de v_0.
   Par un calcul rigoureux on établit que $K = 1/4$, valeur qui sera retenue pour la suite.
2. Définir puis exprimer en fonction de a et v_0 le débit-volume D_V de l'écoulement.
3. On appelle vitesse débitante v_D la vitesse définie par :

$$v_D = \frac{D_V}{\pi a^2}$$

   Comparer v_0 et v_D. Quel est le type d'écoulement associé à v_D ?
4. Prouver à partir du seul champ des vitesses que l'écoulement de Poiseuille étudié précédemment est un écoulement incompressible.

   On donne en cylindriques :

$$\text{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

5. Que vaut la "vorticité" de cet écoulement ? Définir et exprimer le vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega}$.

   On rappelle en coordonnées cylindriques pour un champ vectoriel $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

   Peut-on associer à un écoulement de Poiseuille un potentiel des vitesses ?

6. Écoulement d'eau autour d'une bulle de gaz

Le rayon $a(t)$ d'une bulle de gaz fixe de centre O varie au cours du temps. L'espace autour de la bulle est rempli d'eau et on suppose l'écoulement incompressible. Vu les symétries, on cherche un champ des vitesses de la forme

$$\overrightarrow{v}(r, t) = v(r, t)\vec{e}_r$$

1. Exprimer le débit de volume à travers la sphère de rayon r. En déduire que $v(r,t) = \dfrac{f(t)}{r^2}$ où $f(t)$ est une fonction inconnue du temps.
2. Retrouver le résultat en utilisant l'expression de la divergence en coordonnées sphériques pour un champ de la forme $\overrightarrow{v}(r,t) = v(r,t)\vec{e}_r$:
$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2 a_r)}{\partial\, r}$$
3. En déduire l'expression de $v(r,t)$ en fonction de r, $a(t)$ et $\dot{a}(t) = \dfrac{da(t)}{dt}$. Montrer que le champ des vitesses dérive d'un potentiel $\Phi(r,t)$ et l'expliciter.
Que peut-on en conclure quant à la rotation des particules fluides ?

7. Onde de gravitation

1. Un fluide dans l'état de repos occupe toute la région des z négatifs ($z'z$ est un axe vertical ascendant). La propagation d'une onde de gravitation engendre un mouvement décrit par le champ des vitesses suivant :
$$\overrightarrow{v} = a\omega e^{kz}\left(\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_x} - \sin(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}\right) \text{ avec } ka \ll 1.$$
   (a) Montrer que l'écoulement est incompressible.
   (b) Comparer l'accélération locale et l'accélération convective.
   (c) Soit Z l'altitude de la surface libre. Au repos, la surface libre a pour équation $Z = 0$. Que devient son équation lorsqu'elle est agitée par une onde de gravitation (on considèrera que $\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = v_z(x,0,t)$) ?
2. Déterminer l'équation des lignes de courant.
3. (a) Caractériser les trajectoires des particules du fluide. On étudie une particule de fluide de position moyenne (x_0, z_0) dont la vitesse a pour expression $\overrightarrow{V_{\mathcal{F}}}(t) \simeq \overrightarrow{v}(x_0, z_0, t)$.
   (b) Représenter sur un même schéma les positions occupées par des particules dont les coordonnées au repos seraient : $z = z_0\ ;\ x = x_0 + n\dfrac{\lambda}{8}$ avec $0 \leq n \leq 4$.
   (c) Application numérique : $\lambda = 80$ m ; $a = 0{,}5$ m.