

# Équations dynamiques locales

## I Écoulement des fluides réels

### I.1 Équation de Navier-Stokes

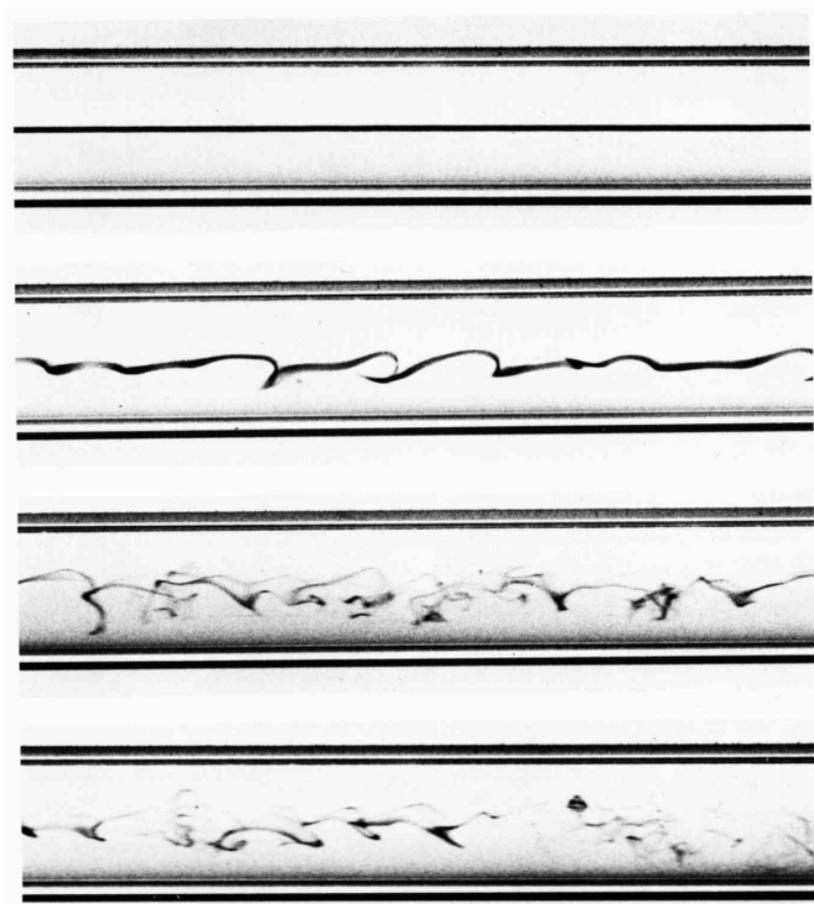
On s'intéresse à l'**écoulement incompressible** d'un **fluide newtonien**.

En écrivant le théorème de la résultante cinétique appliqué à une particule fluide de volume  $d\tau$  dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ , on trouve :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_V - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

### I.2 Exemples d'écoulements

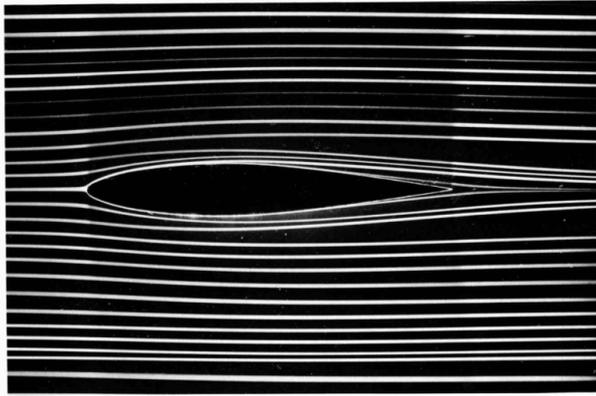
#### a Expérience historique de Reynolds



103. Repetition of Reynolds' dye experiment. Osborne Reynolds' celebrated 1883 investigation of stability of flow in a tube was documented by sketches rather than photography. However the original apparatus has survived at the University of Manchester. Using it a century later, N. H. Johannesen and C. Lowe have taken this sequence of photographs. In laminar flow a filament of colored water

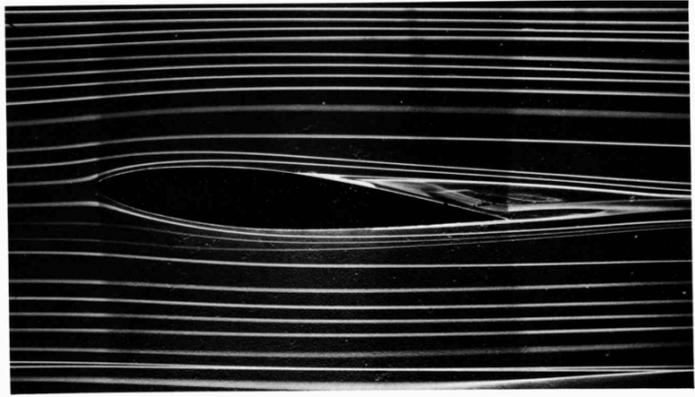
introduced at a bell-shaped entry extends undisturbed the whole length of the glass tube. Transition is seen in the second of the photographs as the speed is increased; and the last two photographs show fully turbulent flow. Modern traffic in the streets of Manchester made the critical Reynolds number lower than the value 13,000 found by Reynolds.

b Écoulement autour d'un obstacle



23. Symmetric plane flow past an airfoil. An NACA 64A015 profile is at zero incidence in a water tunnel. The Reynolds number is 7000 based on the chordlength. Streamlines are shown by colored fluid introduced up-

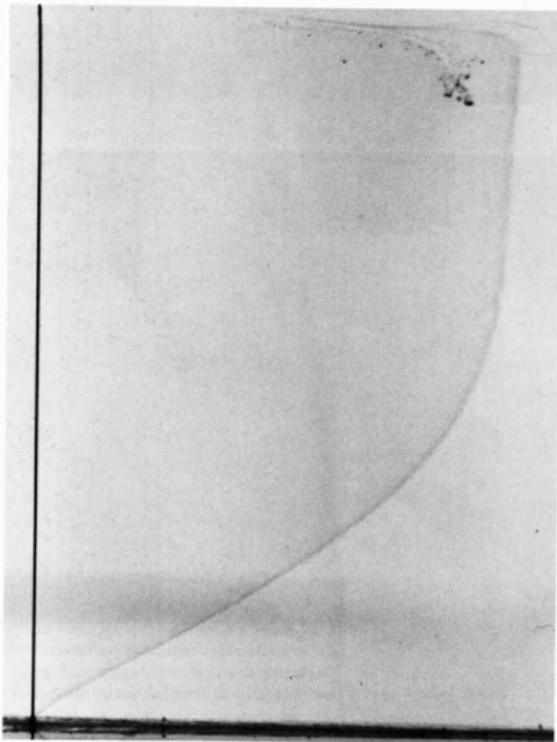
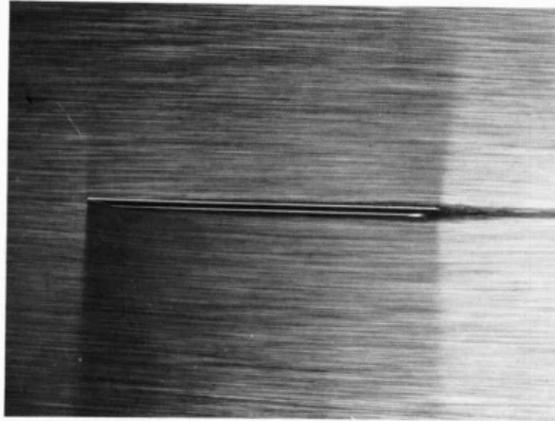
stream. The flow is evidently laminar and appears to be unseparated, though one might anticipate a small separated region near the trailing edge. ONERA photograph, Werlé 1974



34. Boundary-layer separation on an inclined airfoil. When the NACA 64A015 airfoil of figure 23 is raised to 5° incidence the laminar boundary layer separates from the rear half of the upper surface. The flow remains attached

to the lower surface, from which it leaves tangentially at the trailing edge. Streamlines are shown by colored fluid filaments in water. ONERA photograph, Werlé 1974

29. Flat plate at zero incidence. The plate is 2 per cent thick, with beveled edges. At this Reynolds number of 10,000 based on the length of the plate, the uniform stream is only slightly disturbed by the thin laminar boundary layer and subsequent laminar wake. Their thickness is only a few per cent of the plate length, in agreement with the result from Prandtl's theory that the boundary-layer thickness varies as the square root of the Reynolds number. Visualization is by air bubbles in water. ONERA photograph, Werlé 1974



30. Blasius boundary-layer profile on a flat plate. The tangential velocity profile in the laminar boundary layer on a flat plate, discovered by Prandtl and calculated accurately by Blasius, is made visible by tellurium. Water is flowing at 9 cm/s. The Reynolds number is 500 based on distance from the leading edge, and the displacement thickness is about 5 mm. A fine tellurium wire perpendicular to the plate at the left is subjected to an electrical impulse of a few milliseconds duration. A chemical reaction produces a slender colloidal cloud, which drifts with the stream and is photographed a moment later to define the velocity profile. Photograph by F. X. Wortmann

### I.3 Conditions aux limites

## II Écoulements aux faibles nombre de Reynolds

### II.1 Écoulements stationnaires

#### a Écoulement de Poiseuille cylindrique

cf TDMF03 Exercice 3

#### b Écoulement de Couette plan

cf TDMF03 Exercice 4

### II.2 Un exemple d'écoulement non stationnaire

cf TDMF03 Exercice 2

## III Écoulements parfaits

On appelle *écoulement parfait* un écoulement dans lequel on néglige tous les phénomènes diffusifs, en particulier la viscosité.

### III.1 Équation d'Euler

Dans un écoulement parfait, la deuxième loi de Newton se traduit par une équation, appelée équation d'Euler, qui peut se mettre sous l'une des trois formes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_v(M) - \overrightarrow{\text{grad}} P(M) \\ \mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v(M) - \overrightarrow{\text{grad}} P(M) \\ \mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = \vec{f}_v(M) - \overrightarrow{\text{grad}} P(M) \end{array} \right.$$

### III.2 Écoulement parfait, permanent et incompressible

#### a Relation de Bernoulli

L'équation d'Euler peut alors se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( P + \frac{1}{2} \mu v^2 + e_p \right) = \mu \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}.$$

Les forces volumiques dérivent d'une énergie potentielle volumique  $e_p$ .

**b Propriétés**

La grandeur  $\Pi = P + \frac{1}{2}\mu v^2 + e_p$  est invariante le long d'une ligne de courant dans un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible.

**c Écoulement potentiel**

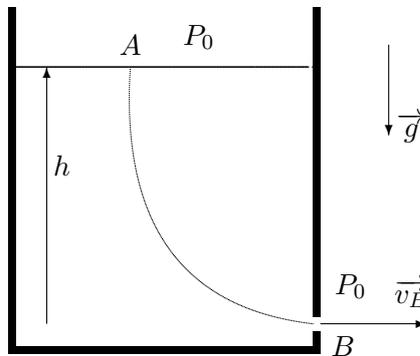
La grandeur  $\Pi = P + \frac{1}{2}\mu v^2 + e_p$  est invariante dans tout le fluide.

**III.3 Applications****a Vidange d'un réservoir**

Vitesse du jet sortant : formule de Torricelli

Les hypothèses suivantes sont raisonnables :

- (1) il existe une ligne de courant  $\mathcal{C}$  allant d'un point  $A$  de la surface libre à un point  $B$  de la section minimale du jet de sortie ;
- (2) le champ des vitesses dans le jet au voisinage du trou présente une géométrie cylindrique telle que celle qui a été décrite précédemment :  $\vec{v} = v(r)\vec{e}_x$  où  $r$  est la distance à l'axe du jet et  $\vec{e}_x$  est le vecteur directeur de l'axe du jet.
- (3) la vitesse d'écoulement en  $A$  est négligeable devant la vitesse d'écoulement en  $B$  ;
- (4) la pression atmosphérique est quasiment identique en  $A$  et en  $B$ .



L'application de la formule de Bernoulli le long de  $\mathcal{C}$  s'écrit, avec  $e_p = gz$  :

$$P_A + \frac{1}{2}\mu v_A^2 + \mu gz = P_B + \frac{1}{2}\mu v_B^2.$$

La pression en  $A$  est égale à la pression atmosphérique  $P_0$  ; il en est de même de la pression en  $B$  si on néglige le gradient vertical de pression au sein du jet sortant. En négligeant  $v_A^2$  devant  $v_B^2$ , on obtient la vitesse d'éjection

$$v_B = \sqrt{2gh} \quad (\text{formule de Torricelli}).$$

Étude de l'évolution du niveau en fonction du temps

Le débit volumique  $D$  peut s'exprimer de deux façons, si  $S$  désigne la section du réservoir et  $s$  désigne la

section du trou :

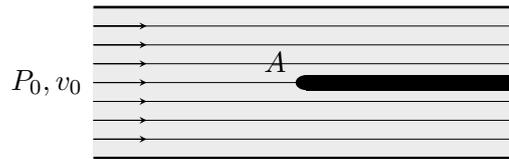
$$\begin{cases} D = sv_B = s\sqrt{2gh} \\ D = Sv_A = -S\frac{dh}{dt} \end{cases} \quad \text{donc } h^{-1/2}\frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}.$$

En intégrant, on obtient

$$\sqrt{h(t)} - \sqrt{h(0)} = -\frac{s}{S}\sqrt{g/2}t.$$

Expérimentalement, on observe une vidange un peu plus lente que ce que prévoit ce modèle. Plus précisément, on trouve que tout se passe comme si le jet avait une section  $s'$  inférieure à la section du trou. Le coefficient  $s'/s$ , appelé coefficient de débit, vaut environ 0,6 pour un trou circulaire dans une paroi verticale.

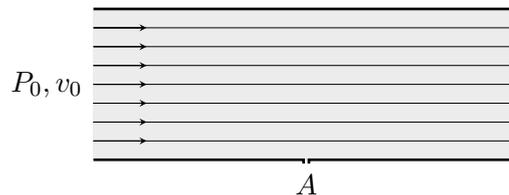
### b Pression en un point d'arrêt



$A$  est un point d'arrêt ; la vitesse  $y$  est nulle. En un point éloigné de  $A$ , en amont du capteur de pression, et sur la même ligne de courant, on a une pression  $P_0$  et une vitesse  $v_0$ . Le théorème de Bernoulli donne

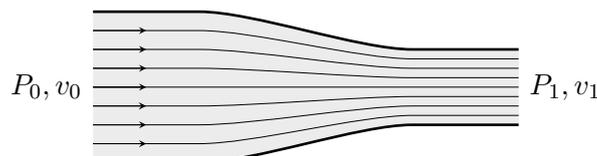
$$P_A = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2.$$

### c Pression sur une paroi latérale



La différence fondamentale entre cette situation et la précédente est le fait que, dans le premier cas, le point  $A$  est situé sur une ligne de courant du fluide, alors que, dans le second cas, l'écoulement entre les points  $A$  et  $B$  peut être modélisé par un écoulement de Couette dans la zone où le gradient de vitesse est important. Au voisinage de la prise latérale de pression, le champ des pressions est identique au champ de pression en régime statique. Le capteur mesure donc la pression  $P_0$ .

### d Phénomène de Venturi



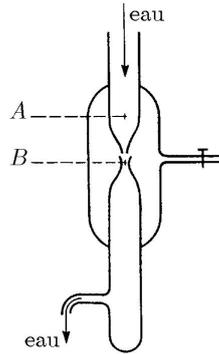
La pression  $P_1$  est inférieure à la pression  $P_0$  ; en effet, le théorème de Bernoulli appliqué à la ligne de courant axiale donne :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2,$$

avec  $v_1 > v_0$ .

### e Trompe à eau

La trompe à eau schématisée sur la figure ci-dessous est une application de l'effet Venturi.



Le courant d'eau créé une dépression dans l'ampoule par effet Venturi. Soient  $S_A$  et  $S_B$  les aires des sections droites de la veine d'eau en  $A$  et  $B$ , les vitesses d'écoulement en ces points sont telles que

$$S_A v_A = S_B v_B$$

La hauteur de l'ampoule peut être supposée très inférieure à 10 m ; le rôle de la pesanteur peut alors être négligé. Le théorème de Bernoulli se réduit alors à

$$\begin{aligned} P_A + \frac{1}{2} \mu v_A^2 &= P_B + \frac{1}{2} \mu v_B^2 \\ &= P_B + \frac{1}{2} \mu v_A^2 \left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit la dépression

$$P_B - P_A = \frac{1}{2} \mu v_A^2 \left[ 1 - \left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 \right]$$

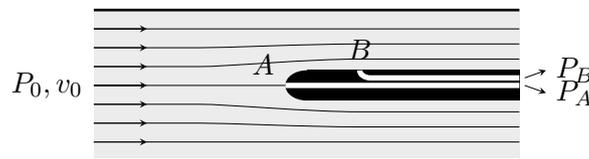
Pour

$$\frac{S_A}{S_B} = 5 ; v_A = 1 \text{ m.s}^{-1} ; \mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3},$$

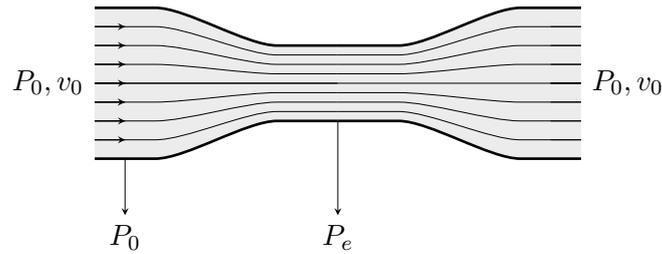
on obtient  $P_B - P_A = -1,2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ .

### f Capteurs de vitesse d'écoulement

#### Tube de Pitot



Le tube de Pitot associe une prise de pression latérale et une prise de pression en un point d'arrêt. La mesure de la différence de pression entre ces deux points de mesure permet d'accéder à la valeur de la surpression  $P_A - P_B = \frac{1}{2} \mu v_0^2$ . Le système est donc un moyen de mesure des vitesses.

Tube de Venturi

Pour mesurer la vitesse d'écoulement dans un tube de section  $S$ , on peut ménager un étranglement local du tube de section  $s < S$ . On mesure les pressions par des prises sur la paroi dans l'étranglement (pression  $P_e$ ) et hors de l'étranglement (pression  $P_0$ ). Soit  $v_0$  la vitesse d'écoulement hors de l'étranglement et  $v_e$  la vitesse d'écoulement dans l'étranglement. Le théorème de Bernoulli et la condition d'incompressibilité donnent les équations

$$\begin{cases} P_0 + \frac{1}{2}\mu v_0^2 = P_e + \frac{1}{2}\mu v_e^2 \\ Sv_0 = sv_e \end{cases}$$

En éliminant  $v_e$ , on obtient

$$P_0 + \frac{1}{2}\mu v_0^2 = P_e + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{S}{s}\right)^2 v_0^2$$

soit

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_e)}{\mu \left(1 - \left(\frac{S}{s}\right)^2\right)}}$$

**g Champ des pressions en écoulement courbe**

Dans l'approximation où la viscosité et les forces à distance peuvent être négligées, l'équation d'Euler peut se mettre sous la forme

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P$$

où l'accélération peut s'écrire

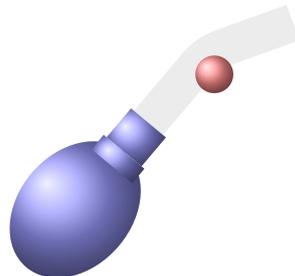
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = a_t \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

où  $\vec{e}_n$  est le vecteur unitaire normal à la trajectoire et  $R$  le rayon de courbure de celle-ci.

En projetant sur  $\vec{e}_n$ , on obtient

$$\mu \frac{v^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial r}.$$

La pression augmente lorsque l'on s'éloigne du centre de courbure.



Ceci permet d'expliquer la lévitation d'une balle de ping pong dans le jet d'air d'un sèche-cheveux.