Champ électrostatique

Questions de cours

- Rappeler la loi de Coulomb.
- Retrouver l'ordre de grandeur du champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène.
- Quelle est l'expression du potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle ?
- Quelle est la position relative des lignes de champ par rapport aux surfaces équipotentielles ? Démonstration.
- Les lignes de champ électrostatique sont-elles ouvertes ou fermées ?
- Rappeler l'équation locale de Maxwell-Gauss.
- Que peut-on dire du flux de champ $\overrightarrow{E}$ dans une zone vide de charge ?
- Énoncer le théorème de Gauss.
- Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air.

Applications directes du cours

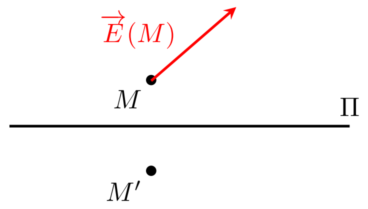
$\boxed{1}$ Dans les différents systèmes de coordonnées (coordonnées catésiennes, cylindriques et sphériques), donnez l'expression du vecteur déplacement élémentaire puis l'expression des surfaces élémentaires et enfin l'expression du volume élémentaire.

$\boxed{2}$ Calculez, en sommant des longueurs,des surfaces ou des volumes élémentaires :
- — le périmètre d'un cercle de rayon R,
- — la surface d'un rectangle de longueur a et de largeur b,
- — la surface d'un disque de rayon R,
- — la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h,
- — la surface d'une sphère de rayon R,
- — le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h,
- — le volume d'une boule de rayon R.

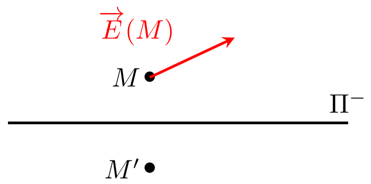
$\boxed{3}$ Soit une sphère de centre O et de rayon R, portant une répartition surfacique de charges σ. Déterminer les transformations laissant cette distribution de charge invariante. Soit un point M de l'espace, déterminer la direction du champ $\overrightarrow{E}$ en M.

$\boxed{4}$ Compléter les schémas en dessinant le champ électrostatique au point M' :

a) Le plan Π est un plan de symétrie d'une distribution de charge $\mathscr{D}$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π.



b) Le plan Π^- est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charge $\mathscr{D}$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π.



$\boxed{5}$ On considère une distribution de charge $\mathscr{D}$ de densité volumique ρ_0 uniforme, d'extension infinie, comprise entre deux plans $z = \pm\frac{a}{2}$ dans un repère cartésien. Déterminer les expressions du champ électrostatique et du potentiel électrostatique créés par 3 méthodes :
- — Théorème de Gauss
- — Équation de Maxwell-Gauss
- — Équation de Poisson.

On prendra $V(0) = 0$. Étudier le cas particulier où $a \to 0$.

$\boxed{6}$ On considère le cas d'un plan infini uniformément chargé (densité surfacique de charge σ_0). Définir une surface de Gauss intéressante. Calculer le champ puis en déduire le potentiel créés en P par la distribution. Tracer E et V.

$\boxed{7}$ On considère une boule de centre O, de rayon R uniformément chargée de densité volumique de charges ρ.

1. Déterminer la charge Q de la boule en fonction de ρ et de R.
2. Déterminer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette boule en tout point de l'espace.
3. En déduire le potentiel électrostatique V.
4. Tracer les variations spatiales de E et V
5. Exprimer l'énergie électrostatique de cette boule en fonction de Q et R.

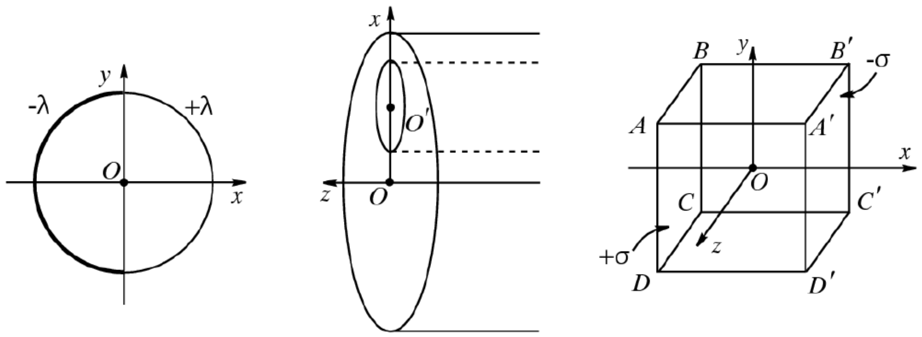
$\boxed{1}$; $\boxed{2}$ $P = 2\pi R$, $S_{\text{rect}} = a \cdot b$, $S_{\text{disque}} = \pi R^2$, $S_{\text{cyl}} = 2\pi Rh$, $S_{\text{sphere}} = 4\pi R^2$, $V_{\text{cyl}} = \pi R^2 h$, $V_{\text{boule}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$; $\boxed{3}$ $\overrightarrow{E}$ est radial ; $\boxed{4}$; $\boxed{5}$ Pour $|z| > \dfrac{a}{2}$: $\overrightarrow{E}(M) = \pm\dfrac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\overrightarrow{u_r} = \dfrac{z}{|z|}\dfrac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$, $V(M) =??$, pour $|z| < \dfrac{a}{2}$, $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{\rho_0 z}{\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$.

Exercices

1. Invariances et symétries

Pour les distributions de charges suivantes (cf illustration), donner les invariances et les plans de symétrie ou d'antisymétrie.

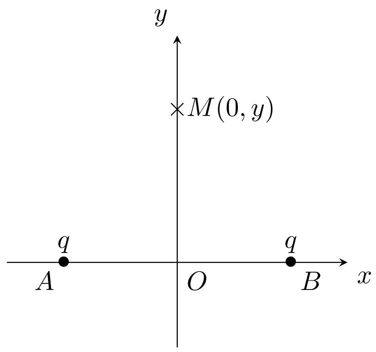
1. Distribution circulaire de charge.
2. Cylindre infini d'axe (Oz) comportant une partie cylindrique évidée d'axe $(O'z)$ portant une charge volumique ρ_0 uniforme.
3. Cube d'arête a. Les côtés $ABCD$ et $A'B'C'D'$ portent des charges surfaciques uniformes opposées $+\sigma$ et σ.

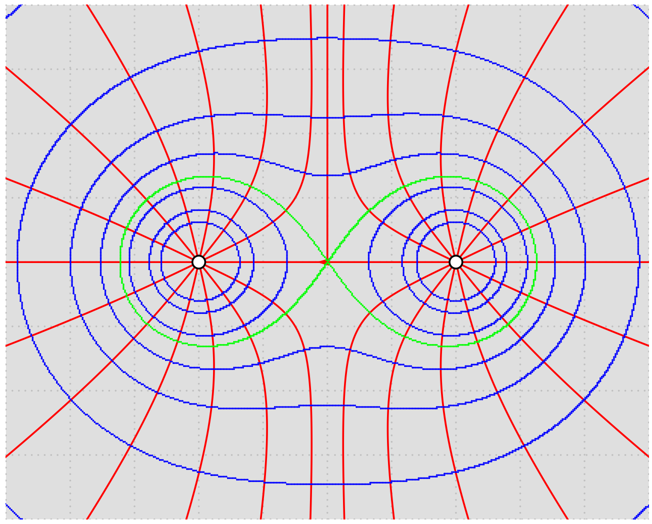


2. Deux charges identiques

On étudie le champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles identiques (charge q) placées sur l'axe (Ox) à une distance a de O (cf figure ci-dessous).

1. Déterminer les plans de symétrie de cette distribution de charge.
2. Exprimer le champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Oy). Tracer $E(y)$.
3. Trouver l'expression de champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Ox). Tracer $E(x)$.
4. Sur la carte ci-contre, quelles sont les lignes de champ et les équipotentielles ?
5. Orienter les lignes de champ.
6. Soit Q une charge pouvant se déplacer dans le plan xOy, déterminer les positions d'équilibre de Q et leur stabilité.

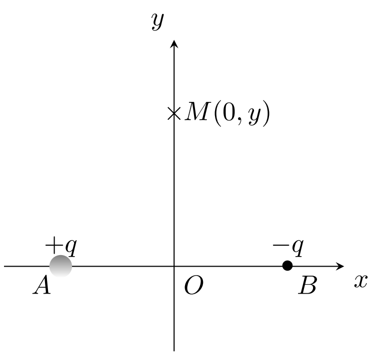


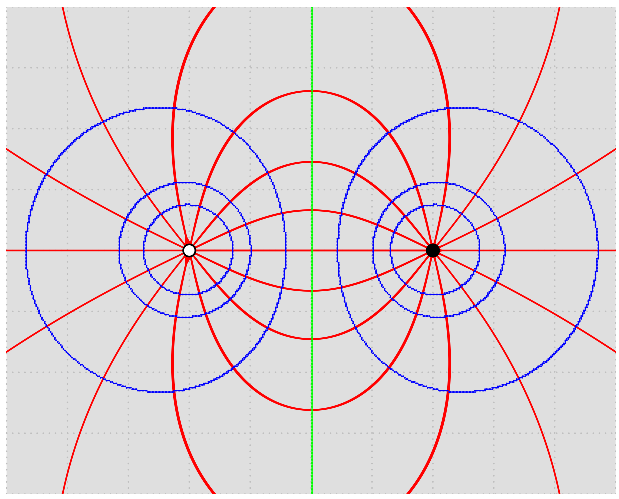


3. Deux charges opposées

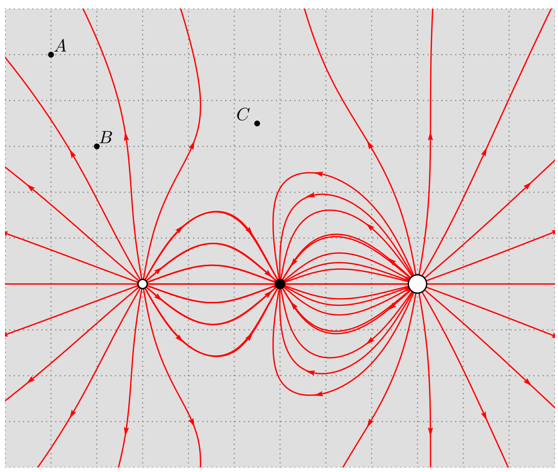
On étudie le champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles opposées (charges $\pm q$) placées sur l'axe (Ox) à une distance a de O (cf figure ci-dessous).

1. Déterminer les plans de symétrie de cette distribution de charge.
2. Exprimer le champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Oy). Tracer $E(y)$.
3. Trouver l'expression de champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Ox). Tracer $E(x)$.
4. Sur la carte ci-dessous, distinguer les lignes de champ des équipotentielles et orienter les lignes de champ.





4. Topographie



Le schéma ci-contre représente les lignes du champ électrostatique créé par des charges ponctuelles placées dans un plan.

1. Quel est le signe de chaque charge ?
2. Quel est le signe de la charge totale ?
3. La norme du champ en A est de 100 V.m^{-1}. Calculer une valeur approchée du champ en B.
4. Que peut-on dire du champ au voisinage de point C ?

5. Sphère chargée en surface

On considère une sphère uniformément chargée en surface (densité surfacique de charge σ_0). Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution et en déduire le potentiel M. Tracer les variations spatiales de E et V.

6. Cylindre et équipotentielle

Soit un cylindre de hauteur infinie, de rayon R et d'axe Oz. Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques $(r;\theta;z)$. La surface latérale du cylindre est une équipotentielle $V = V_0$. Déterminer les expression $\vec{E}$ et V en tout point de l'espace puis donner la forme des lignes de champ et des surfaces équipotentielles pour les deux situations suivantes :

1. le cylindre est chargé uniformément en surface avec une densité surfacique de charge σ_0.
2. le cylindre est chargé en volume avec une densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$ pour $r < R$ et 0 sinon.

7. Condensateur cylindrique

Ce modèle permet de calculer la capacité linéique d'un câble coaxial.
Un condensateur cylindrique est constitué de deux surfaces cylindriques, de même axe z. La hauteur de chaque cylindre est notée h. h étant très grand par rapport aux rayons des cylindres, on pourra, pour les calculs de champ électrique, considérer les cylindres comme infinis. Le premier cylindre, de rayon R_1 porte une charge totale Q. Le deuxième, de rayon $R_2 > R_1$, porte une charge totale $-Q$. Ces charges sont uniformément réparties en surface sur les armatures. Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2. Soit un point M situé à la distance r de l'axe.

1. Calculer le champ électrique entre les armatures.
2. Calculer le potentiel électrique entre les armatures. Exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de Q, ϵ_0, h, R_1 et R_2.
3. Exprimer la capacité C du condensateur en fonction de Q et des potentiels électriques des armatures V_1 et V_2, puis en fonction de ϵ_0, h, R_1 et R_2. Faire application numérique pour $R_1 = 1,5$ mm, $R_2 = 5,0$ mm et $h_{=}1$ m.
4. Que devient l'expression de la capacité C si les rayons des armatures sont très voisins c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$? Montrer que le condensateur cylindrique est alors équivalent à un condensateur plan dont on donnera les caractéristiques (épaisseur et surface).

8. Répartition non uniforme de charges

Soit une boule de rayon a_0 et de centre O qui porte la densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0(1 - \dfrac{r}{a_0})$ où ρ_0 est une constante positive. Il n'y a pas de charges à l'extérieur de la boule.

1. Déduire des symétries et des invariances que le champ électrique s'écrit sous la forùe $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.
2. Déduire de l'équation de Maxwell-Gauss, le champ électrique pour $r < a_0$ et pour $r > a_0$. On rappelle que le champ électrique est continu lorsque les charges sont réparties dans des volumes.
   On donne en coordonnées sphériques :
   $$\operatorname{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2 A_r)}{\partial\, r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,(\sin\theta\, A_\theta)}{\partial\,\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,(A_\varphi)}{\partial\,\varphi}$$
3. Retrouver les résultats en utilisant le théorème de Gauss.

9. Potentiel de Yukawa

On considère une distribution de charges électriques créant en un point M tel que $\|\overrightarrow{OM}\| = r$ un potentiel : $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r}e^{-r/a}$ (potentiel de Yukawa).

1. Déterminer le champ $\overrightarrow{E}(r)$. Comment varie ce champ au voisinage immédiat du point O ? A.N. Calculer E pour $r = a = 1$ Å ; $q = 1,6.10^{-19}$ C.
2. Calculer le flux Φ du champ électrique à travers une sphère de rayon r et de centre O. Que devient Φ lorsque $r \to 0$ et $r \to \infty$?
3. Montrer que le potentiel de Yukawa est créé par une charge ponctuelle q_0 et une charge diffuse de densité $\rho(r)$ que l'on déterminera.
4. Calculer le potentiel créé en O par la charge diffuse. En déduire l'énergie nécessaire pour séparer la charge ponctuelle de la charge diffuse qui l'entoure.
5. Le système précédent représente un modèle d'atome. Quelle est l'énergie d'ionisation de cet atome ?

10. Modélisation d'un nuage mince et d'un orage

On considère un nuage, qu'on modélise comme un plan infini $z = h$. Il est chargé avec une densité surfacique de charge σ négative.

1. Déterminer le champ électrique engendré par le nuage dans tout l'espace.
2. Le sol est le plan $z = 0$. Il est chargé avec une densité surfacique de charge $-\sigma$. Calculer alors le champ électrique entre $z = 0$ et $z = h$.
3. En déduire le potentiel électrique entre $z = 0$ et $z = h$. On prendra la constante telle que $V(0) = 0$.
4. Le nuage est un carré de 10 km de côté. Il est à une altitude $h = 2$ km. Un éclair se produit lorsque le champ électrique dépasse le champ disruptif de l'air, c'est-à-dire le champ pour lequel l'air devient conducteur. Le champ disruptif de l'air humide est typiquement $E_{\text{dis}} = 10$ kV.cm^{-1}.
   Calculer alors le potentiel $V(h)$ du nuage lors d'un orage.

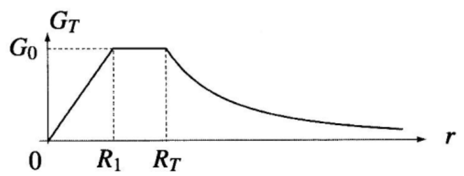
11. Champ dans une cavité vide de charges.

On considère une boule de centre O_1 et de rayon R_1 portant la charge totale Q supposée uniformément répartie à l'intérieur de la boule. On creuse à l'intérieur de cette boule une cavité sphérique de centre O_2 et de rayon R_2 : cette cavité est supposée vide de toute charge électrique.

1. Montrer en exploitant le principe de superposition que le champ à l'intérieur de la cavité est uniforme, égal à
$$\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$$
2. Que vaut le champ électrique à l'intérieur d'une boule creuse, dont la charge totale est uniformément répartie entre les sphères de centre O et de rayons R_1 et $R_2 > R_1$?

12. Champ de gravitation terrestre

1. Retrouver au moyen d'une analogie le théorème de Gauss gravitationnel.
2. La Terre est assimilée à une sphère de centre O , de rayon $R_T = 6,38 \cdot 10^3$ km, de masse $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg, uniformément répartie dans tout le volume.
   (a) Déterminer le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathscr{G}_T}$ en tout point de l'espace.
   (b) Tracer $G_T = \|\overrightarrow{\mathscr{G}_T}\|$ en fonction de r.
   (c) Calculer la norme G_0 de G_T à la surface de la Terre.
3. L'étude des ondes sismiques montre que le modèle d'une masse uniformément répartie n'est pas réaliste. Le modèle décrit par la courbe ci-dessous est plus conforme aux observations, avec $R_1 = 3,50 \cdot 10^3$ km :



(a) Tracer sur le même graphe la courbe obtenue à la question précédente quand on supposait une masse volumique uniforme, en précisant soigneusement le raisonnement.

(b) Calculer la masse volumique moyenne du noyau terrestre ($0 < r < R_1$).

(c) Tracer l'allure de la masse volumique $\rho(r)$ de la Terre. Préciser en particulier si $\rho(r)$ est croissante ou décroissante dans le manteau terrestre ($R_1 < r < R_T$).

On donne éventuellement, en coordonnées sphériques, pour un champ $\overrightarrow{a}(M) = a_r(r)\overrightarrow{u_r}$:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\, r^2 a_r}{\partial\, r}$$