

Devoir surveillé n°5

Samedi 04 février 2023

- Vous devez vérifier que le sujet comprend 14 pages numérotées.
- Vous êtes invités à porter une attention toute particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Toute réponse devra être justifiée et ce, même si l'énoncé ne le précise pas (sauf mention particulière).
- Vous devez établir une relation littérale avant d'effectuer toute application numérique (sauf mention particulière).
- Toute relation littérale présentant une erreur flagrante d'homogénéité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Le téléphone portable est strictement interdit. Il doit être rangé éteint dans le sac.
- La calculatrice est autorisée.

Vous ne traiterez que deux sujets ! Une copie par sujet !

Piste bleue : Orage et foudre et Le gecko

Piste rouge : Orage et foudre et Films de savon

Première partie

Orage et foudre

Préambule

L'électrosphère est une couche atmosphérique ionisée. L'électrosphère et la Terre, de rayon $R = 6370$ km, forment un gigantesque condensateur terrestre (figure 1), où le champ électrique par beau temps est dirigé de l'électrosphère vers la Terre et atteint environ 100 à 120 V.m^{-1} .

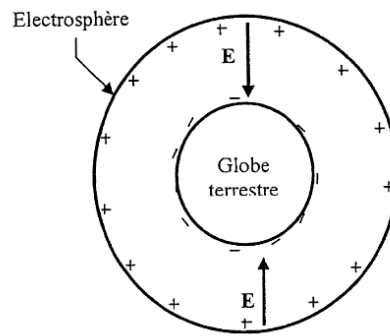


Figure 1 - Terre et électrosphère

Les armatures de ce condensateur sont l'électrosphère et le globe terrestre, entre lesquelles il y a la troposphère et la stratosphère qui constituent le diélectrique, dont l'épaisseur est d'environ 80 km.

L'air comprend en permanence des charges électriques, positives et négatives, créées par les rayonnements cosmiques ou la radioactivité de la Terre. Par beau temps, il en résulte un courant atmosphérique de densité volumique $\vec{J}$ tendant à décharger le condensateur.

Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulo-nimbus (figure 2) de couleur sombre. Ils constituent une gigantesque machine thermique dont la base et le sommet sont respectivement à environ 2 km et 15 km d'altitude. Sa constitution est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde. Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage. La partie supérieure, où il fait froid, est occupée par les particules de glace, tandis que les gouttes d'eau s'établissent dans la partie inférieure.

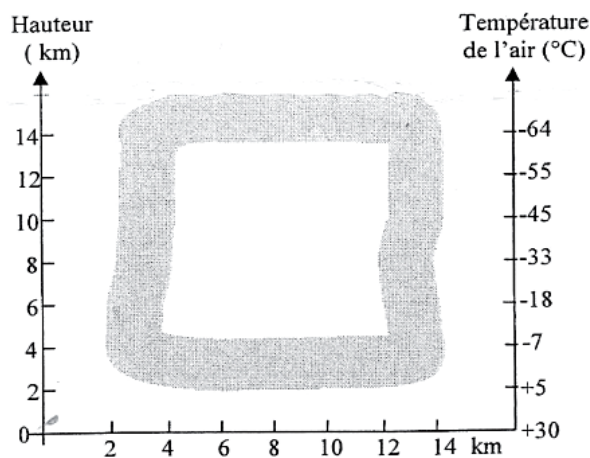


Figure 2 - Cumulo-nimbus

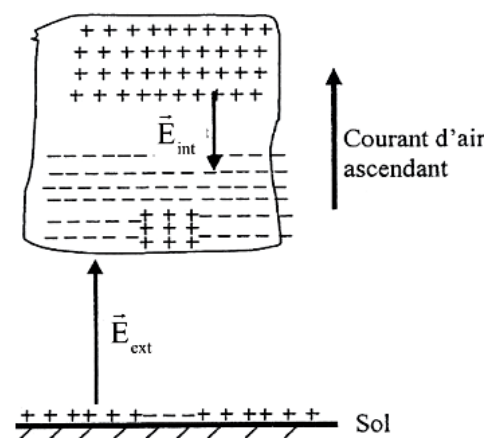


Figure 3 - Dipôles électriques

Les violents courants ascendants provoquent des collisions entre les gouttes d'eau et les micro-particules de glace, ce qui produit la création de charges électriques par frottement. Ces micro-particules de glace, plus légères et chargées positivement, sont emportées vers le haut par le courant d'air ascendant et occupent ainsi la partie supérieure du nuage qui forme le pôle positif. Tandis que les gouttes d'eau chargées négativement s'établissent dans la partie inférieure et créent le pôle négatif. Cependant, une petite quantité de charges positives demeurent à la base du nuage.

Le nuage fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge de signe opposé et crée ainsi deux véritables dipôles électriques (figure 3) :

- Un dipôle interne généré entre les pôles positif et négatif du nuage. Si le champ électrique interne $\vec{E}_{int}$ devient suffisamment grand, il provoque un claquage interne dans le nuage ;
- un dipôle externe, généré entre la base du nuage et la surface de la Terre. Si le champ électrique externe

$\overrightarrow{E_{ext}}$ atteint des conditions critiques de l'ordre de 20 kV.m^{-1} , il finit par provoquer une grande décharge entre le nuage et la Terre.

I Étude d'un condensateur sphérique

Un condensateur sphérique à air (figure 5), dont la permittivité diélectrique est assimilable à celle du vide, est formé de deux armatures concentriques, de rayon R_1 et R_2 , avec $R_1 < R_2$.

L'armature intérieure de rayon R_1 porte une charge totale Q uniformément répartie. L'armature extérieure porte la charge totale $-Q$ uniformément répartie.

On travaillera ici dans la base classique des coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ et dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

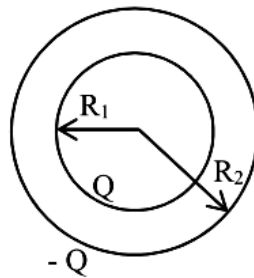


Figure 5 - Condensateur sphérique

1. Par des arguments clairs et précis d'invariance et de symétrie, justifier qu'entre les armatures, le champ électrique est de la forme : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.
2. a) Déterminer l'expression du champ électrique entre les armatures, en fonction de r , Q et ϵ_0 .
 b) En déduire la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les deux armatures en fonction de Q , R_1 , R_2 et ϵ_0 .
 c) En déduire l'expression de la capacité de ce condensateur sphérique en fonction de R_1 , R_2 et ϵ_0 .
3. Le diélectrique n'est pas parfait. Il possède une résistivité électrique certes grande mais finie. Il circule alors un courant de densité volumique dans tout l'espace inter-conducteur. Faire un dessin montrant l'allure et le sens des lignes de courant dans le cas où $Q > 0$.

II Analyse du préambule

En vous appuyant sur le texte fourni en préambule, répondre aux six questions suivantes :

4. Donner une valeur approchée de la capacité du condensateur délimité par l'électrosphère et le globe terrestre.
5. Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie électrique stockée en permanence et par beau temps dans l'électrosphère ?
6. Le champ électrique qui règne à la surface de la Terre est-il, en général, dans le même sens ou en sens opposé suivant que le temps est clément ou orageux ?
7. a) Lequel de l'éclair ou de la foudre correspond à un claquage diélectrique interne au nuage ?
 b) La foudre est-elle toujours descendante ou non ?
8. Quel est l'ordre de grandeur de la différence de potentiel entre la Terre et le nuage juste avant l'arrivée de la foudre ?

9. Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie véhiculée par un coup de foudre de courant $I = 50000$ A et d'une durée de 10 ms ? Dans le cadre des énergies renouvelables, vous paraît-il judicieux de vouloir récupérer cette énergie ou non ? Une argumentation de quelques mots est attendue.

III Coup de foudre sur une ligne électrique

L'impact direct de la foudre (figure 6) sur une ligne électrique ou une ligne téléphonique, génère une onde qui se propage dans les deux sens. Le courant de foudre I peut atteindre 50 000 A et générer une onde de tension supérieure à 10^6 V.

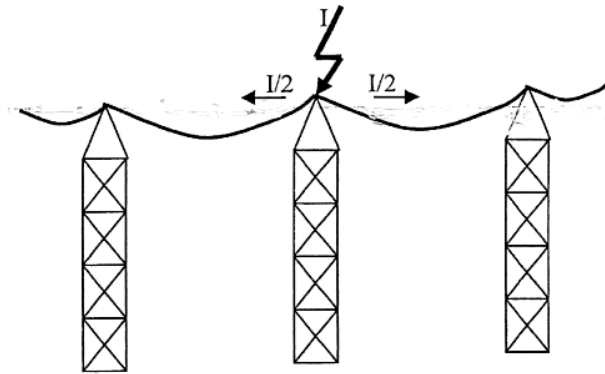


Figure 6 - Impact direct sur une ligne électrique

Aspect dynamique

On modélise pour cet aspect dynamique, une portion de ligne électrique, de longueur dx , par la cellule suivante (figure 7) où ℓ et c représentent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique de la ligne.

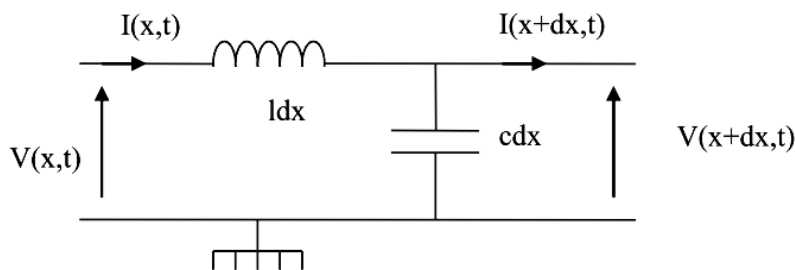


Figure 7 - Modèle électrique d'une portion de ligne

10. a) Expliciter le système d'équations aux dérivées partielles couplées vérifié par les fonctions $V(x, t)$ et $I(x, t)$.
- b) En déduire les deux équations aux dérivées partielles, découplées, vérifiées par la fonction $V(x, t)$ d'une part, puis par la fonction $I(x, t)$ d'autre part.

Lors d'un dysfonctionnement d'une partie du réseau de distribution électrique de fréquence $f = 50$ Hz et compte-tenu des inductances des lignes, les disjoncteurs de fortes intensités ne peuvent ouvrir le circuit que lors d'un passage par zéro du courant électrique. Il n'est donc pas rare d'attendre un temps de l'ordre de quelques millisecondes avant de pouvoir ouvrir une portion de ligne parcourue par un courant électrique jugé trop important.

11. a) À quelle vitesse se propage l'onde de tension ou l'onde de courant liée à la foudre sur une ligne électrique ?
- b) Jusqu'à quelle distance d peut se faire ressentir un coup de foudre 1 ms après son impact ?
- c) Application numérique : évaluer la distance d .

Aspect thermique

On se propose ici d'écrire une équation permettant de déterminer un ordre de grandeur de l'élévation de température, notée ΔT_{foudre} , atteinte par un tronçon de ligne électrique, en almélec, assimilable à un cylindre de rayon $R = 3$ cm, traversé par un courant de foudre d'intensité supposée constante et égale à 25 000 A ($I/2$) pendant une durée Δt de 10 ms.

Les candidats devront faire preuve d'initiatives pour résoudre cet aspect et veilleront à ne pas passer plus de 15 minutes dessus.

12. Définir votre système ainsi qu'un modèle simple d'étude.

13. Recenser, en précisant leur unité, les grandeurs physiques dont vous avez besoin pour résoudre ce problème ;

14. Écrire pour ΔT_{foudre} une équation faisant intervenir les grandeurs précitées.

IV Protection contre la foudre et prise de terre

L'élévation de la température ΔT_{foudre} n'est pas suffisante pour détériorer la ligne électrique.

Néanmoins, il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre de façon à ne pas laisser se propager des ondes de tension qui pourraient endommager les appareils électriques des usagers.

Une prise de terre (figure 8) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O , de rayon intérieur R_a , et de rayon extérieur R_b . On note γ_{met} , la conductivité électrique du métal qui la constitue. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé au demi espace $z < 0$ et de conductivité électrique γ_{sol} .

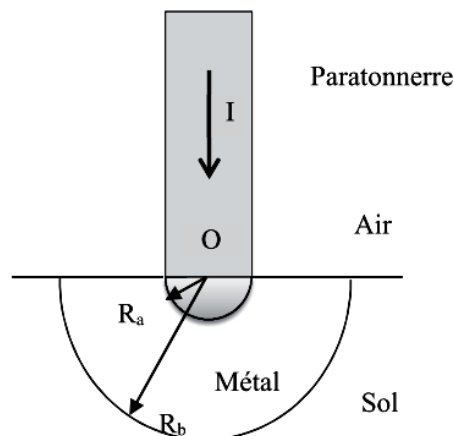


Figure 8 - Modèle simplifié d'une prise de terre

La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques R_{metal} et R_{sol} , l'une en métal de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b , l'autre associée au sol de rayon intérieur R_b et de rayon extérieur infini.

Elle est destinée à recevoir un courant I provenant d'un paratonnerre. Il sera supposé indépendant du temps et descendant.

On suppose que le courant, qui traverse la prise de terre, est radial. Sa densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

15. a) Rappeler l'unité de la grandeur $j(r)$.

b) Donner l'expression de la densité de courant $j(r)$ en fonction de I et de r .

16. a) Exprimer alors le champ électrique $E(r)$ régnant dans le sol.

b) En déduire en fonction de I , r et γ_{sol} , l'expression du potentiel électrique $V(r)$ régnant dans le sol. On supposera que $V = 0$ loin du point O .

17. Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux.

On appelle R_h , la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de a . Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée : I_{max}), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à D de la prise de terre.

- Trouver une relation entre D , a , R_h , I , I_{max} et γ_{sol} .
- En supposant $D \gg a$, exprimer D en fonction de a , R_h , I , I_{max} et γ_{sol} .
- Application numérique : évaluer D pour $I = 5,010^4$ A.
- Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux, ...) ou les petits animaux (lapins, renards, ...) ?

18. Expression de la résistance d'une coque hémisphérique

On considère une coque hémisphérique homogène de conductivité électrique γ , comprise entre les rayons R_{int} et R_{ext} et parcourue par un courant radial.

On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons r et $r + dr$.

- Exprimer en fonction de γ , r et dr , la résistance élémentaire dR_C d'une coque hémisphérique élémentaire.
- En déduire en fonction de γ , R_{int} et R_{ext} , la résistance totale R_C de la coque hémisphérique.

19. a) Donner l'expression de la résistance globale, notée R_{glob} de la prise de terre en fonction de γ_{met} , γ_{sol} , R_a et R_b .

b) Application numérique : évaluer R_{glob} pour $R_a = 1,0$ cm, $R_b = 35$ cm, $\gamma_{met} = 6,0$ S.m⁻¹.

c) La législation en terme de sécurité électrique impose que $R_{glob} < 25\Omega$, est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

Données :

Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ F.m⁻¹

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹

Constante de Faraday : 1 Faraday = 96 500 C.mol⁻¹ = $\mathcal{N}_A \cdot e$ (e = charge élémentaire d'un proton)

Caractéristiques électriques d'une ligne électrique

Inductance linéique : $\ell = 1,5$ mH.km⁻¹

Capacité linéique : $c = 10$ nF.km⁻¹

Physique du sol et du corps humain

Conductivité électrique du sol : $\gamma_{sol} = 1,0 \cdot 10^{-2}$ S.m⁻¹

Résistance électrique entre deux pieds d'un homme : $R_h = 2,5$ k Ω

Longueur d'un pas humain : $a = 1,0$ m

Courant d'électrocution d'un être humain : $I_{max} = 25$ mA

Rappels d'électrostatique

Capacité d'un condensateur plan : $C = \frac{\epsilon S}{e}$ où S est la surface des deux armatures en regard et e la distance entre les armatures.

Densité volumique d'énergie électrostatique : $w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ où E est le champ électrique.

Énergie d'un condensateur : $W_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ où U est la différence de potentiel entre les deux armatures et Q la charge du condensateur.

Deuxième partie

Le gecko

.

.

.

Troisième partie

Films de savon, film noir

Les films de savon (ou plus généralement de tensioactif) sont l'objet de recherches actuelles pour différentes raisons. D'un point de vue fondamental, le film plan peut constituer, par exemple, un excellent système modèle pour l'étude de la membrane biologique. D'un point de vue industriel, l'étude des propriétés physiques des mousses de savon, dont le constituant de base est la bulle de savon, a de nombreuses applications (lessives, mousses pétrolières...).

Dans sa réalisation la plus simple, un tel film de savon peut être obtenu en plongeant un cadre dans de l'eau savonneuse et en le sortant lentement : du liquide est entraîné et reste "accroché" sur le cadre. Dans toute la suite, les films de savons étudiés seront formés sur un cadre plan, vertical.

La figure suivante donne une représentation schématique de la structure du film de savon.

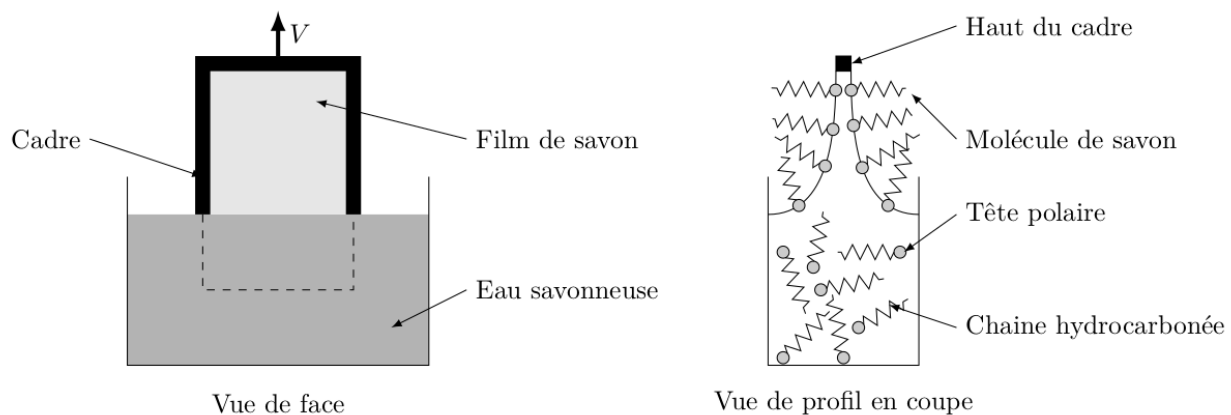


Figure 1 : Film de savon plan formé sur un cadre rectangulaire vertical, tiré du bain d'eau savonneuse à la vitesse V (les représentations ne sont pas à l'échelle)

Au cours du drainage, lorsque l'épaisseur du film devient de l'ordre de 100 nm, d'autres phénomènes que le drainage gravitaire entrent en jeu : le film s'amincit brusquement et va se stabiliser ensuite à une épaisseur bien définie. Il est alors quasi-transparent et est dit "film noir" (si l'on place un écran noir derrière le film, il apparaît noir). Son état résulte de l'équilibre entre différentes interactions : attraction de van der Waals et répulsion d'origine électrostatique. Nous nous proposons d'étudier ces différentes interactions. Dans toute cette partie, l'épaisseur du film est supposée uniforme sur toute sa surface.

A – Nous nous intéressons d'abord à l'attraction de van der Waals : le demi-espace d'air d'un côté du film est attiré par le demi-espace de l'autre côté, ce qui provoque le brusque amincissement observé.

L'énergie potentielle d'interaction, associée aux forces de van der Waals, entre deux molécules A et B est $V_{AB} = \frac{-K}{r_{AB}^6}$, où K est une constante (que l'on ne cherche pas à connaître) qui dépend de la nature des molécules et du milieu et où r_{AB} est la distance entre les deux molécules.

1. Calculer, par intégration, l'énergie potentielle d'interaction $E(d)$ entre une molécule A et un demi-espace de molécules B (Figure 2), en fonction de K , de d la distance de A au demi-espace et de n_B le nombre de molécules par unité de volume dans le demi-espace.

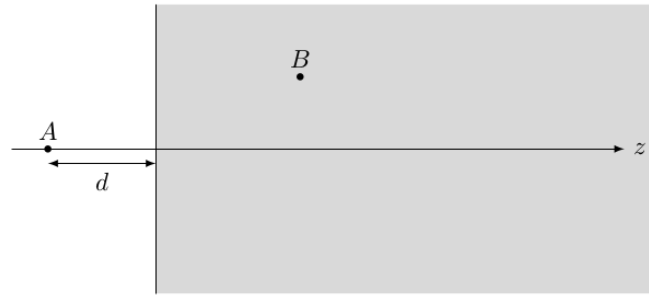


Figure 2 : Molécule A placée à la distance d d'un demi-espace infini de molécules B

De même, on peut calculer par intégration l'énergie potentielle d'interaction entre deux demi-espaces distants de D . Entre une aire unité du premier demi-espace et le deuxième demi-espace, on a l'énergie potentielle d'interaction $U(D) = \frac{-H}{12\pi D^2}$ où H est la constante de Hamaker qui dépend de la nature des molécules et du milieu séparant les deux demi-espaces. L'ordre de grandeur de H est ici $H \approx 1 \times 10^{-20}$ J.

B – Lorsque le film s'amincit sous l'effet des forces de van der Waals, il y a aussi une répulsion qui apparaît entre les deux interfaces qui limitent le film. En effet, les molécules de savon (molécules tensioactives), sont le plus souvent ioniques : leur dissociation en milieu aqueux laisse à l'interface une tête polaire chargée et un contre-ion (de charge opposée) libéré en solution. Ce sont donc deux parois chargées de même signe qui se rapprochent.

Nous raisonnons dans le cas d'un plan chargé négativement (la tête polaire porte une charge $-e$) et les contre-ions libérés portent la charge $+e$. De plus, dans la majorité des situations expérimentales, des sels dissociés (généralement $[\text{Na}^+ \text{Cl}^-]$) sont également présents en solution. Ils portent respectivement la charge $+e$ (contre-ions) et la charge $-e$ (co-ions). Chacune des parois chargées est ainsi entourée d'un cortège de contre-ions (provenant du sel ou de la molécule de savon dissociée), attirés par la paroi chargée ; l'ensemble forme une double-couche électrostatique (figure 3). Lorsque le film s'amincit, le recouvrement partiel des deux double-couches électrostatiques (correspondant aux deux parois du film) crée une augmentation de pression et donc une force répulsive au sein du film de savon. Ainsi, nous sommes amenés à étudier la répartition des charges en solution au voisinage d'un plan chargé.

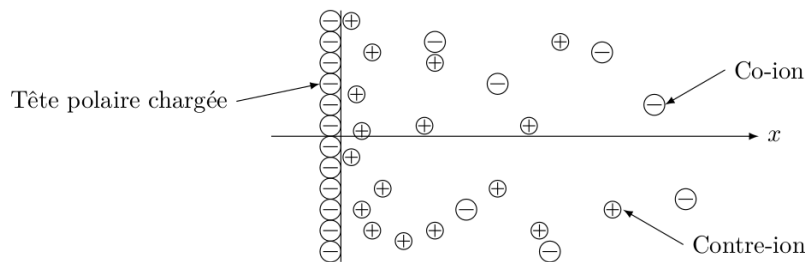


Figure 3 : Représentation schématique d'une "double-couche" électrostatique modélisant une paroi du film de savon

On note c_0 la concentration particulière (nombre d'ions par unité de volume) en ions provenant du sel ajouté à la solution. L'axe (Ox) est toujours normal au plan du film de savon ; le plan de l'interface chargée correspond à $x = 0$ (figure 3). On note $c_+(x)$ et $c_-(x)$ les concentrations particulières, respectivement en ions positifs et négatifs, dans la solution au voisinage du plan chargé. On note $\psi(x)$ le potentiel électrostatique dans la solution.

2. Rappeler la forme de $V(r)$, énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 , distantes de r , dans le vide (on choisit une expression telle que quand $r \rightarrow \infty$ on a $V(r) \rightarrow 0$).

En solution, cette expression est identique, à condition de remplacer ε_0 par $\varepsilon_r \varepsilon_0$, avec $\varepsilon_r = 80$, la permittivité relative de l'eau.

3. À partir de quelle distance l_B , appelée longueur de Bjerrum, l'énergie potentielle $V(r)$ entre deux charges $+e$ est-elle comparable à l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique $k_B T$?
4. Calculer numériquement l_B dans le cas de l'eau à $T \approx 3 \times 10^2$ K.

Dans la suite, on pourra utiliser tous les résultats d'électrostatique connus dans le vide, en remplaçant simplement ε_0 par $\varepsilon_r \varepsilon_0$.

5. Exprimer l'énergie potentielle $E_{p+}(x)$ d'un cation, de charge $+e$ dans le potentiel électrostatique $\psi(x)$. Même question pour $E_{p-}(x)$, énergie d'un ion de charge $-e$.

La concentration particulière en ions en solution est donnée par une loi de Boltzmann : $c_+(x) = c_0 \exp\left(\frac{-E_{p+}(x)}{k_B T}\right)$ et $c_-(x) = c_0 \exp\left(\frac{-E_{p-}(x)}{k_B T}\right)$, où T est la température en Kelvin.

6. Exprimer la densité volumique de charge $\rho(x)$ en fonction de $c_+(x)$ et $c_-(x)$.

7. Montrer que le potentiel $\psi(x)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{e\psi}{k_B T} \right) = \frac{1}{\lambda_D^2} \sinh\left(\frac{e\psi}{k_B T}\right)$ et donner l'expression de λ_D , longueur de Debye, en fonction de k_B , T , ε_r , ε_0 , c_0 et e , puis en fonction, entre autres, de l_B .

8. Calculer numériquement λ_D pour une valeur de c_0 correspondant à 1×10^{-3} mol.L $^{-1}$ de sel ajouté en solution d'une part et pour 0,1 mol.L $^{-1}$ d'autre part.

9. Dans le cas des potentiels faibles on peut linéariser l'équation précédente : on utilise le développement $\sinh x \approx x$. Donner alors la forme de $\psi(x)$. On introduira ψ_0 le potentiel en $x = 0$.

10. En déduire la forme de $c_+(x)$ et $c_-(x)$. Tracer l'allure des courbes représentant ces fonctions. Interpréter physiquement la longueur de Debye.

C – Grâce au calcul précédent, on peut montrer que l'énergie potentielle d'interaction, $W(D)$, entre les deux plans chargés distants de D (interfaces limitant le film de savon) suit une loi du type : $W(D) = W_0 \exp(-D/\lambda_D)$, où W_0 est une grandeur positive, homogène à une énergie par unité de surface, qui dépend du potentiel de surface ψ_0 .

L'énergie potentielle totale d'interaction (par m 2) entre les deux parois du film est alors $E_t(D) = U(D) + W(D)$. La figure 4 présente la forme de cette énergie potentielle totale, pour deux situations expérimentales différentes, correspondant à des concentrations en sel ajouté notées respectivement c_1 et c_2 . On a $c_1 < c_2$.

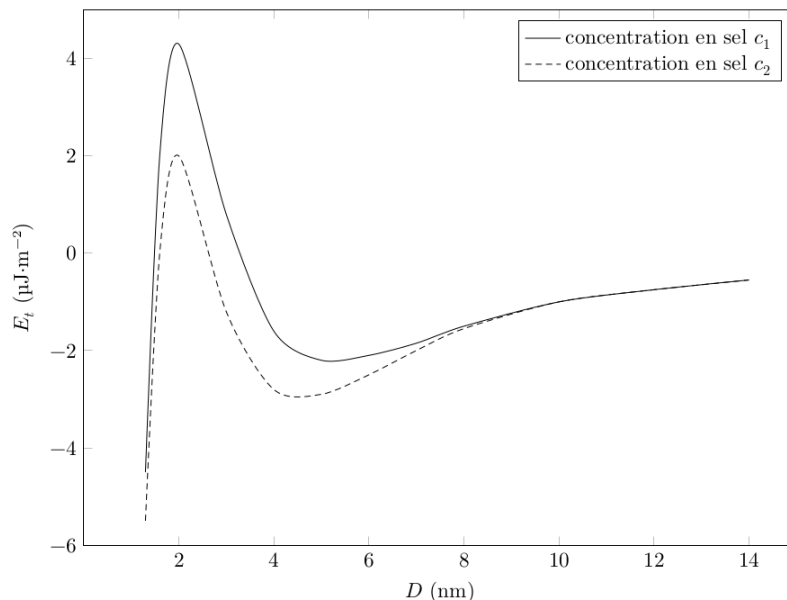


Figure 4 : Allure de l'énergie potentielle totale $E_t(D)$, en fonction de D , pour deux concentrations en sel différentes

11. L'énergie potentielle totale représentée en figure 4 vous semble-t-elle réaliste lorsque D tend vers 0 ? Proposer éventuellement une allure modifiée pour la courbe $E_t(D)$, en justifiant votre démarche.

12. Expliquer pourquoi, à l'issue du drainage du film, on peut à priori observer deux types de films noirs différents.

Le premier type, d'épaisseur la plus importante est appelé "film noir commun" et le deuxième type, d'épaisseur la plus faible, est appelé "film noir de Newton" ou "second film noir".

13. Une concentration en sel élevée favorise t-elle la formation d'un film noir commun, ou d'un film de Newton (réponse qualitative attendue) ?

Données

Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Formulaire

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$