

Champ magnétostatique

Exercices

1. Plan parcouru par un courant

Entre les deux plans $z = -a$ et $z = +a$ existe un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0 \vec{u}_x$. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace et le représenter graphiquement.

2. Cylindre parcouru par un courant inhomogène

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,

$$\vec{j}(r) = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z$$

1. Exprimer J_0 en fonction de I .
2. Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.
3. Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

Données : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

3. Définition légale de l'Ampère

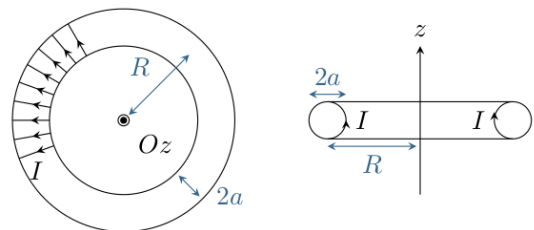
L'ampère est l'intensité i du courant électrique tel que, pour deux fils rectilignes infinis, disposés parallèlement à une distance $D = 1$ m, parcourus par cette intensité i , la force par unité de longueur est $\frac{F}{\ell} = 2.10^{-7} \text{ N.m}^{-1}$.

En déduire la valeur de la perméabilité μ_0 du vide.

4. Bobine torique

Une bobine torique est un enroulement de fil conducteur sur un support en forme de tore, c'est-à-dire la forme d'une bouée. Le support torique est caractérisé par un rayon moyen R autour de son axe de symétrie (Oz) et une section circulaire de rayon $a < R$.

L'enroulement comporte $N \gg 1$ spires que l'on modélisera par des spires planes circulaires de rayon a . Le nombre de spires est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer les spires comme continûment réparties le long du tore. On note I le courant circulant dans cette bobine. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).



Montrer que le champ magnétostatique créé par cette bobine s'écrit $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$, et le calculer en tout point M , en distinguant les cas selon que M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la bobine.

5. Fil conducteur creux

Un fil conducteur épais de rayon R et d'axe (Oz) est parcouru par un courant de densité $j\vec{u}_z$ uniforme.

1. Déterminer le champ $\vec{B}_0$ en tout point M de l'espace.
2. Exprimer $\vec{B}_0$ en fonction de $\vec{u}_z$ et $\vec{OM}$ pour $r < R$.
3. On suppose maintenant que le fil est creux et présente une cavité cylindrique parallèle à l'axe du cylindre mais décentrée par rapport à cet axe. Dans le reste du cylindre, la densité de courant est toujours égale à $\vec{j}$. Calculer le champ magnétique dans la cavité.

6. Distribution à géométrie cylindrique

On considère, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique $\vec{B}$ défini par :

$$\vec{B} = B_0 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r-a}{a}\right) \vec{e}_\theta \text{ pour } 0 \leq r \leq a$$

et

$$\vec{B} = B_0 \frac{a}{r} \vec{e}_\theta \text{ pour } r > a.$$

Déterminer les courants qui sont à l'origine de ce champ. (Le milieu considéré sera supposé comme étant équivalent au vide : $\mu = \mu_0$).

$$\text{Données : } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_z$$

7. Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même axe Oz :

- l'âme $\mathcal{C}_1$ est un cylindre conducteur plein, de rayon a_1 ,
- l'armature externe, ou gaine, est un cylindre creux, de rayon a_2 et d'épaisseur négligeable.
- le volume entre les deux est constitué par un isolant, assimilé à du vide.

Ce câble est utilisé dans un circuit électrique : l'âme est parcourue par un courant I dirigé dans le sens des z croissants, réparti uniformément en volume. La gaine, elle, est parcourue par le courant $-I$ en retour.

1. Calculer le champ magnétostatique entre les armatures.
2. On souhaite calculer le champ à l'intérieur de l'âme.
 - (a) Exprimer la densité volumique de courant $\vec{j}$ l'intérieur de l'âme en fonction de I et a_1 .
 - (b) En déduire, par application du théorème d'Ampère, le champ en tout point de l'âme.
3. Représenter la norme de $\vec{B}$ en fonction de r .
4. Soit une surface rectangulaire de hauteur h (selon Oz) et de largeur $a_2 - a_1$ (selon Or), surface située entre les 2 armatures et orthogonale à celles-ci (surface de vecteur normal $\vec{u}_\theta$). Calculer le flux Φ du champ magnétique à travers cette surface. En déduire le coefficient d'autoinduction par unité de longueur Γ .

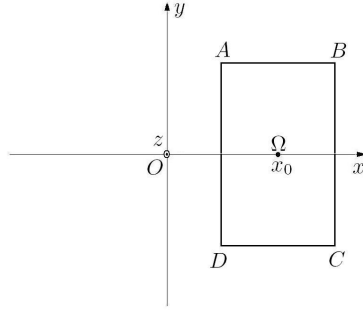
8. Étude d'un solénoïde épais

On considère un bobinage uniforme comprenant n spires par unité de longueur réparties en plusieurs couches (m couches par unité d'épaisseur). Le bobinage est effectué sur un cylindre de rayon R_1 ; le rayon externe du bobinage est R_2 . On note I l'intensité du courant dans la bobine.

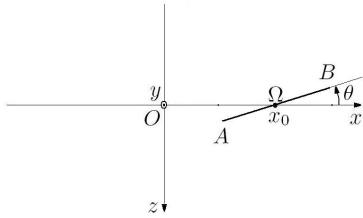
1. Par une étude de symétrie détaillée, donner la direction du champ magnétique $\vec{B}$ en un point quelconque.
2. Le champ magnétique à l'extérieur de la bobine est nul. Déterminer le champ magnétique en un point quelconque de l'espace.

9. Inductance mutuelle entre un fil et un cadre rectangulaire

On considère un cadre $ABCD$, de centre Ω d'abscisse x_0 , de côtés $AB = a$, $BC = d$ et un fil infini $y'y$ dans le plan du cadre.



1. Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle du cadre et du fil.
2. Le fil étant parcouru par un courant d'intensité i constante, le cadre est en translation à la vitesse $v_0 \vec{e}_x$. Déterminer la force électromotrice induite dans le cadre.
3. On fait pivoter $ABCD$ d'un angle θ autour de l'axe Ωy .



Déterminer le nouveau coefficient d'inductance mutuelle.