

Équations de Maxwell

I Les lois de l'électromagnétisme

I.1 Le champ électromagnétique

I.2 Les équations de Maxwell

a Équations de Maxwell du premier groupe

Les équations du premier groupe représentent les propriétés intrinsèques des champs. Elles s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{Équ. de Maxwell-Flux (M-}\Phi\text{)} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Équ. de Maxwell-Faraday (M-F)} \end{array} \right.$$

b Équations de Maxwell du second groupe

Les équations du second groupe relient les champs aux sources (densités de charge et de courant).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Équ. de Maxwell-Gauss (M-G)} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) & \text{Équ. de Maxwell-Ampère (M-A)} \end{array} \right.$$

c Découplage des équations en régime indépendant du temps

Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Flux restent inchangées en régime indépendant du temps ; en revanche, les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère perdent leur terme en dérivée temporelle ; on peut donc regrouper les équations de Maxwell en deux groupes découplés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

Les deux premières sont les équations électriques, et les deux dernières sont les équations magnétiques.

I.3 Conservation de la charge électrique

Exprimons $\vec{j}$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère et calculons sa divergence ; on obtient

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \left(\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t}.$$

La divergence de $\vec{E}$ se déduit de l'équation de Maxwell-Gauss ; il reste

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

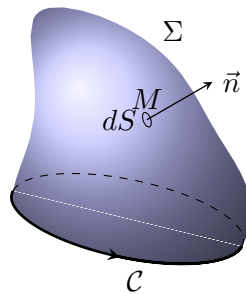
Nous avons ainsi montré que les équations de Maxwell contiennent la propriété de conservation locale de la charge électrique.

I.4 Formulation intégrale

a Équation de Maxwell-Flux

Comme son nom l'indique, l'équation de Maxwell-Flux décrit des propriétés du flux du champ magnétique.

1. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée quelconque est nul.
2. Le flux du champ magnétique à travers une surface ouverte orientée de bord $\mathcal{C}$ ne dépend que de $\mathcal{C}$; par abus de langage, on parle alors de flux du champ magnétique à travers la courbe fermée $\mathcal{C}$.



b Équation de Maxwell-Faraday

C'est la formulation locale de la loi de Faraday de l'induction. Si e est la force électromotrice d'induction le long d'une courbe fermée $\mathcal{C}$, définie par

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

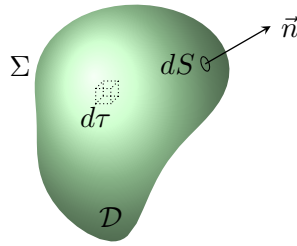
et φ étant le flux de $\vec{B}$ à travers $\mathcal{C}$ ¹

On a la relation suivante, dite *loi de Faraday*

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}.$$

1. Ce concept est justifié par la propriété précédente.

c Équation de Maxwell-Gauss



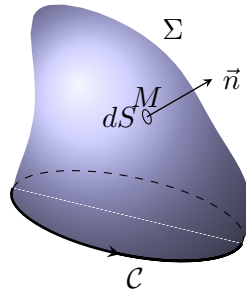
C'est la formulation locale du théorème de Gauss (généralisation aux régimes quelconques du théorème de Gauss de l'électrostatique). Si $Q_{\mathcal{D}}$ est la charge localisée à l'intérieur d'un domaine $\mathcal{D}$ limité par une surface fermée Σ , le flux Φ_{Σ} du champ électrique à travers cette surface est

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{Q_{\mathcal{D}}}{\epsilon_0}.$$

d Équation de Maxwell-Ampère

C'est la formulation locale du théorème d'Ampère ; sa formulation n'est simple qu'en régime permanent. Si $I_{\mathcal{C}}$ est l'intensité enlacée par la courbe fermée $\mathcal{C}$, la circulation $\Gamma_{\mathcal{C}}$ du champ magnétique le long de cette courbe est

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \mu_0 I_{\mathcal{C}}.$$



La notion d'*intensité enlacée* n'a de sens qu'en régime indépendant du temps. En effet, dans un tel régime, la divergence de $\vec{j}$ est nulle ; le flux de $\vec{j}$ présente alors les mêmes caractéristiques que le flux de $\vec{B}$ étudié précédemment.

1. Le flux de $\vec{j}$ à travers une surface fermée quelconque est nul ; ceci constitue la *loi des noeuds*.
2. Le flux de $\vec{j}$ à travers une surface ouverte orientée de bord $\mathcal{C}$ ne dépend que de $\mathcal{C}$; on l'appelle *intensité enlacée par la courbe fermée $\mathcal{C}$* .

II Aspect énergétique

II.1 Interaction champ électromagnétique et matière

II.2 Équation locale de Poynting

Des équations de Maxwell, on déduit l'identité suivante, dite *équation locale de Poynting* :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0,$$

dont la structure évoque le bilan local d'une grandeur extensive non conservative.

On postule que

- $u_{E.M.} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique,
- le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ est le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique.

Le bilan local d'énergie électromagnétique s'écrit alors :

$$\frac{\partial u_{E.M.}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0,$$

ce qui montre que l'énergie électromagnétique prise isolément n'est pas une grandeur conservative.

Le terme de création d'énergie électromagnétique est $-\vec{j} \cdot \vec{E}$.

On montre que $\vec{j} \cdot \vec{E}$ est la puissance volumique des forces de Lorentz. Une création d'énergie électromagnétique est en fait un transfert d'énergie de la matière au champ. La grandeur conservative pertinente est l'énergie totale (matière + champ).

II.3 Grandeurs énergétique associées

a Densité volumique d'énergie EM

La densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} s'écrit :

$$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E(M, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B(M, t)^2$$

Un volume $d\tau$ contient l'énergie électromagnétique $dU_{em} = u_{em}d\tau$.

L'énergie magnétique $U_{em}(t)$ contenue dans un volume $\mathcal{V}$ macroscopique s'écrit :

$$U_{em}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{em}(M, t) d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{1}{2}\epsilon_0 E(M, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B(M, t)^2 \right] d\tau$$

b Vecteur de Poynting

On appelle vecteur de Poynting associé au champ électromagnétique le vecteur :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

Le vecteur de Poynting est le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique.

- Unité de Π : en W.m^{-2} ,
- Direction du vecteur de Poynting : elle indique la direction de propagation de l'énergie électromagnétique, et en particulier la direction de la propagation de la lumière.
- Norme du vecteur de Poynting dans le cas de l'optique : sa valeur moyenne donne l'intensité lumineuse.
L'intensité lumineuse

$$I \propto \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée $\mathcal{S}$ correspond à la puissance traversant cette surface.

$$\mathcal{P} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

c Bilan sur un volume donné

Si on intègre l'équation locale de Poynting sur un volume $\mathcal{V}$ donné :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau + \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \right) d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} + \frac{dU_{em}}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{champ} \rightarrow \text{porteurs}}$$

III Approximation des régimes quasi-stationnaires

III.1 Propagation hors des sources

Hors des sources, c'est-à-dire en des points où la densité de charges et de courant est nulle, les champs électrique et magnétique sont les solutions d'une équation d'onde de la forme

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Une telle équation, appelée *équation de d'Alembert*, signifie que les champs se *propagent* à la vitesse c .

Établissons l'équation de d'Alembert pour $\vec{E}$:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{E} - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} \\ &= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Le raisonnement est le même pour $\vec{B}$. On a en outre établi une relation entre c et les constantes ϵ_0 et μ_0 , dite *relation de Maxwell* :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

La constante μ_0 (perméabilité du vide) a une valeur donnée par la définition de l'ampère :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}.$$

La valeur de c est imposée par la définition du mètre. On retient la valeur approchée $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. On en déduit la valeur de ϵ_0 (permittivité du vide) :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \simeq \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F.m}^{-1}.$$

III.2 Régimes statique et propagatif

Les équations de Maxwell pour le champ $\vec{E}$ sont couplées aux équations de Maxwell pour le champ $\vec{B}$ par des termes de dérivées temporelles partielles. Ces termes de couplage s'annulent en régime statique et les équations de l'électrostatique se résolvent indépendamment de celles de la magnétostatique.

A l'opposé, les termes de couplage sont fondamentaux dans l'établissement des équations de propagation ; ils deviennent prépondérants en régime rapidement variable.

III.3 Équations locales de l'ARQS ; domaine d'utilisation

Un cas intermédiaire est représenté par l'ARQS.

Rappel : on appelle Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS) l'approximation consistant à négliger les phénomènes de propagation. Cela veut dire qu'on considère que les ondes électromagnétiques se sont propagées quasi-instantanément dans tout le domaine d'étude.

Pour un système physique de taille D , de durée typique T d'évolution des sources, l'ARQS est valide si la durée de propagation τ du champ électromagnétique est négligeable devant la durée T . Soit $\frac{D}{c} \ll T$.

Conformément au programme, on se place dans le cadre de l'ARQS magnétique, où les effets des distributions de courant dominant ceux des distributions de charges.

$$\rho c \ll j$$

Dans l'équation de Maxwell-Ampère, la densité de courant $\vec{j}$ devient prépondérante devant le terme $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ si les variations temporelles de $\vec{E}$ ne sont pas trop rapides. Si T est le temps caractéristique des variations de $\vec{E}$, dans un conducteur de conductivité σ , on a

$$\|\vec{j}\| \approx \sigma \|\vec{E}\| \text{ et } \left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \approx \frac{\epsilon_0}{T} \|\vec{E}\|$$

$\vec{j}$ est dominant si $T \gg \frac{\epsilon_0}{\sigma}$; pour un métal bon conducteur comme le cuivre $\sigma \approx 10^7 \text{ S.m}^{-1}$, soit $\frac{\epsilon_0}{\sigma} \simeq 10^{-18} \text{ s}$. Cette condition est vérifiée même pour des champs rapidement variables.

Les équations de Maxwell deviennent, dans le cadre de cette approximation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

L'équation de conservation de la charge électrique se réduit alors à

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

La densité de courant étant à divergence nulle, la notion d'intensité enlacée par un contour est utilisable, comme dans le cas statique, et le théorème d'Ampère se généralise sous la forme

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C(t)$$