Paquet d'ondes

I - Le programme

Contenu thématique	Capacité numérique
Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.	À l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement..

II - Les outils python

1 - Les bibliothèques à importer

— numpy

Pour créer des tableaux.

— matplotlib.pyplot

pour les représentations graphiques

2 - Les commandes utiles

Création de tableaux :

— À partir d'une liste. **np.array([liste])** : crée un tableau à partir d'une liste.
— À partir d'un intervalle et d'un nombre d'éléments. **np.linspace(start, end, nbre)** : génère n valeurs entre start et end.
— À partir d'un intervalle et d'un pas. **np.arange(start, end, pas)** : génère des valeurs entre start et end (exclus) espacées du pas.
— Tableau de zéros : **np.zeros(dim)** crée un tableau de 0 de dimension dim.

Boucle **for** avec la fonction **range()** :
La fonction range() permet de générer une liste de parcours.
range(n) renvoi un itérateur de 0 à n-1.
range(a,b) renvoie un itérateur avec a comme premier entier et $b-1$ comme dernier entier.
range(a,b,pas) renvoie l'entier a puis des entiers avec un intervalle *pas* jusqu'à b exclus.

Pour tracer des courbes :
plt.plot(x,y) pour créer le graphique
plt.show() pour afficher le graphique

III - Représentations temporelle et spectrale d'un signal

1 - Transformation de Fourier

Transformée de Fourier : On définit la transformée de Fourier d'un signal temporel $f(t)$ par

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Théorème d'inversion : On montre que le signal temporel peut être reconstitué à partir de sa transformée de Fourier par

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{+j\omega t} d\omega.$$

Ceci signifie donc que $f(t)$ peut être considéré comme une superposition d'une infinité de fonctions sinusoïdales.

Spectre : Le spectre est continu ; il est décrit par la fonction $\omega \to |\hat{f}(\omega)|$.

Si f est réelle, alors $\underline{\hat{f}}(-\omega) = \underline{\hat{f}}^*(\omega)$ et on peut écrire :

$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} 2 \cdot |\hat{f}(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

avec $\varphi(\omega) = \arg(\hat{f}(\omega))$.

2 - Construction d'un signal par superposition de signaux sinusoïdaux

On considère un signal s dont le spectre prend des valeurs non négligeables sur un intervalle de pulsations $\Delta\omega$ centré sur ω_0.

On a alors :

$$s(t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} S(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \mathrm{d}\omega.$$

avec $S(\omega) = 2|\hat{s}(\omega)|$.

Nous allons approcher ce signal par une somme discrète de N signaux sinusoïdaux équirépartis :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} S(\omega_i) \cos(\omega_i t)$$

avec $\omega_i = \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2} + i\,\delta\omega$ et $\delta\omega = \dfrac{\Delta\omega}{N-1}$.

Par la suite, nous allons considérer deux formes de spectres simples :

- un spectre rectangulaire pour lequel $S(\omega) = \dfrac{1}{2(N-1)}$ pour $\omega \in \left[\omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}\right]$,
- un spectre de forme gaussienne : $S(\omega) = \dfrac{2}{(N-1)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-10 \dfrac{(\omega-\omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right)$.

✘ Définir deux fonctions (SpectrePorte et SpectreGauss) qui donne chacune un des deux spectres considérés.

Vous prendrez ω_0 de l'ordre de quelques rad.s^{-1} (par exemple 2π, pour une fréquence de 1 Hz) et $\Delta\omega$ de l'ordre de 0,1 rad.s^{-1}.

✘ Tracer les deux spectres. Vérifiez qu'ils ont à peu près la même largeur spectrale.

✘ Construire les deux signaux (sporte et sgauss) et les tracer. Jouer sur le nombre de composantes en partant de 2.

✘ Pour $N = 10$ composantes, vérifier que vous avez bien le produit extension temporelle par extension spectrale de l'ordre de 1.

IV - Paquet d'ondes et propagation

1 - Paquet d'ondes

D'une manière générale, un signal réel $s(x,t)$ se propageant selon les x croissants dans un milieu non absorbant s'écrit :

$$s(x,t) = \int_{\omega=0}^{+\infty} A(\omega)\cos(\omega t - k(\omega)x + \varphi(\omega))\mathrm{d}\omega.$$

$A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ décrivent respectivement les poids (densité d'amplitude) et les phases des différentes composantes harmoniques de pulsation ω. La fonction $k(\omega)$décrit la relation de dispersion du milieu.

Pour un paquet d'ondes gaussien, nous prendrons comme précédemment :

$$\varphi(\omega) = 0 \text{ et } A(\omega) = A_0 \exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec $\omega_0 \simeq 1$ et $\sigma \simeq 0,1$. $A(k)$ est non négligeable pour $\omega \in [\omega_0 - 5\sigma, \omega_0 + 5\sigma]$.

2 - Relation de dispersion

Pour un paquet d'onde étroit, nous pouvons effectuer un développement limité de k autour de ω_0 :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}(\omega_0)(\omega-\omega_0)^2$$

On peut introduire la vitesse de phase de l'onde moyenne $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{k(\omega_0)}$, la vitesse de groupe $v_g = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)}$ et $B = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}(\omega_0)}$.

Nous allons envisager les trois situations suivantes :

type	relation de dispersion	v_φ	v_g	B
linéaire	$k = \omega/c$	c	c	0
affine	$k = \dfrac{4\omega - \omega_0}{3c}$	c	0,75 c	0
affine	$k = \dfrac{4\omega + \omega_0}{5c}$	c	1,25 c	0
parabolique	$k = \dfrac{3\omega_0^2 + 4\omega\omega_0 + \omega^2}{c}$	c	1,25 c	$1/2c\omega_0$

3 - Propagation

Pour les différentes relations de dispersion, tracer s à différents instants pour voir évoluer le paquet d'ondes.