



Équations de Maxwell

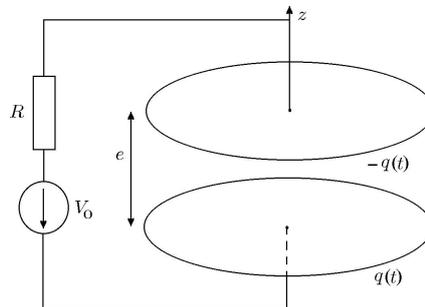
Exercices

1. Étude énergétique d'un conducteur rectiligne

Un conducteur ohmique métallique \mathcal{C} , cylindrique, de longueur infinie, de rayon a , de conductivité γ , est traversé par un courant d'intensité I constante, correspondant à une densité de courant \vec{j} uniforme; les lignes de courant sont orientées suivant l'axe (O, \vec{e}_z) du conducteur.

1. Déterminer l'expression du champ électrique \vec{E} en fonction de I , γ et a .
2. Déterminer, en fonction de a, I, r le champ magnétique en un point $M(r, \theta, z)$ de l'espace.
3. (a) Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en fonction de a, r, γ et I .
 (b) Calculer le flux Φ du vecteur de Poynting à travers la surface fermée constituée par la portion de conducteur limitée par deux sections droites distantes de h .
 (c) Calculer la puissance \mathcal{P} dissipée par effet Joule dans cette portion de conducteur. Comparer cette puissance à Φ . Commenter.

2. Étude énergétique de la charge d'un condensateur plan



Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs, de rayon a , de même axe Oz et séparés d'une distance e sont reliées à un générateur de f.e.m. V_0 par une résistance R . Initialement, le condensateur est déchargé. À un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut $V(t)$, ses armatures portent respectivement les charges $q(t) = CV(t)$ et $-q(t)$ où $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ est la capacité du condensateur. On néglige les effets de bord; en coordonnées cylindriques, le champ électromagnétique dans le condensateur est, en première approximation, de la forme :

$$\vec{E} = E(t)\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{B} = B(r, t)\vec{e}_\theta,$$

et le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

1. Déterminer $V(t)$ et l'énergie U_C du condensateur dans l'état final.
2. À un instant quelconque, déterminer les champs \vec{E} et \vec{B} .
3. En déduire la puissance électromagnétique \mathcal{P} reçue par l'intérieur du condensateur, puis l'énergie électromagnétique U_{em} emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge.
4. Retrouver U_{em} à l'aide de la densité d'énergie électromagnétique.

3. Puissance dissipée dans un conducteur par induction

On considère un cylindre conducteur (conductivité γ) d'axe Oz , de rayon R et de hauteur h . Il est soumis à un champ magnétique variable $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On suppose que $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$.

1. Calculer \vec{E} .
2. Calculer la puissance moyenne dissipée.
3. Citer et expliquer des applications.

4. Bilan énergétique pour un solénoïde dans l'ARQS

Un solénoïde d'axe z comporte n spires par unité de longueur. Il est assez long pour pouvoir être considéré comme infini.

1. Rappeler l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde lorsque le courant I est constant.

On étudie dans la suite le cas d'un courant variable. Il est donné par $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$. On suppose néanmoins que cette variation est assez lente pour pouvoir faire l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Au fur et à mesure de la décroissance de i , l'énergie emmagasinée par le solénoïde va décroître. Nous étudions ici plus en détail cette décroissance.

2. Donner la conditions portant sur τ , la vitesse de la lumière c et le rayon R du solénoïde pour que cette approximation puisse être faite. Rappeler la forme que prennent les équations de Maxwell dans ce cas.
3. Montrer que dans ce cas le champ magnétique est le même que ce lui qui serait obtenu en régime statique, avec un courant qui vaut $i(t)$ à l'instant t . Donner l'expression de ce champ magnétique, puis déterminer l'expression de l'énergie volumique magnétique u_m correspondante.

4. On s'intéresse maintenant au champ électrique. On admet que le champ électrique se met sous la forme $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$.

En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday et en appliquant le théorème de Stokes, montrer que $\vec{E} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \vec{u}_\theta$.

En déduire l'expression de \vec{E} , puis celle de l'énergie volumique électrique u_e .

5. Montrer que $\frac{u_e}{u_m} = \left(\frac{r}{2c\tau}\right)^2$. En déduire que $u_e \ll u_m$ ici. Dans la suite, on négligera donc u_e devant u_m .
6. Calculer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$, et vérifier que l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique (équation de Poynting) est bien vérifiée.
7. Bilan d'énergie global : on considère une portion de solénoïde de longueur h selon l'axe z du solénoïde (volume intérieur du solénoïde, compris entre $z = 0$ et $z = h$ par exemple). Calculer l'énergie U_{em} que contient cette portion à l'instant t , ainsi que le flux Φ_Π du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant cette portion. Vérifier que la variation $\frac{dU_{em}}{dt}$ de U_{em} au cours du temps est égale à $-\Phi_\Pi$.

5. Effet Meissner dans une plaque supraconductrice

Dans un matériau supraconducteur, il existe une densité volumique de courant \vec{j} liée au champ magnétique \vec{B} par la relation $\text{rot } \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$ (appelée équation de London), où λ est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite en tout point intérieur au matériau par le champ magnétique \vec{B} , en régime statique.

2. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2d$, dont les faces sont de dimensions très grandes devant d pour pouvoir négliger les effets de bord.

On choisit l'origine d'un repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu de la plaque, l'axe (Oz) étant perpendiculaire à ses faces qui ont pour équation $z = -d$ et $z = +d$. Cette plaque est plongée dans un champ magnétique, qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme, égal à $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$.

- (a) Déterminer le champ magnétique \vec{B} à l'intérieur de la plaque en supposant que $\vec{B}(d) = \vec{B}(-d) = \vec{B}_0$.
- (b) En déduire le vecteur densité de courant \vec{j} à l'intérieur de la plaque.

3. Un modèle microscopique donne $\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}$, où m est la masse de l'électron, e la charge élémentaire et n_s la densité volumique d'électrons supraconducteurs.

On donne $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m⁻¹, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

- Calculer λ pour $n_s = 1,0 \cdot 10^{29}$ m⁻³.
- Tracer les graphes des composantes non nulles de \vec{B} et \vec{j} en fonction de z .
- Calculer l'épaisseur minimale $2d_m$ de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à $B_0/100$.
- Pour $d \gg \lambda$, à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à un centième de sa valeur à la surface ?

6. Décharge d'un conducteur dans l'air

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R , porte initialement la charge Q_0 uniformément répartie sur sa surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ et initialement localement neutre : $\rho(M, t = 0) = 0$ en tout point M à l'extérieur de la boule.

On cherche le champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre O .

- Déterminer $\vec{E}(M, t = 0)$ à l'extérieur de la boule.
- Déterminer $\vec{B}(M, t)$ à l'extérieur de la boule.
- En utilisant l'identité de Poynting, $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$, trouver le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ à l'extérieur de la boule.
- Montrer que $\rho(M, t) = 0$ à l'extérieur de la boule.
- Déterminer la charge $Q(t)$ portée par la boule à l'instant t .
- Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu entre les instants $t = 0$ et $t = \infty$. Commenter.

7. Sphère radioactive

Une masse radioactive, ponctuelle, initialement neutre, située au point O , émet, à partir de l'instant $t = 0$, des particules α avec une vitesse v_0 supposée constante et de façon isotrope : à l'instant t , la charge électrique située en O est :

$$q(t) = q_0 \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right)$$

- Calculer le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ pour $t > 0$ en tout point de l'espace. Commenter.
- Exprimer la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ et la densité volumique de courant $\vec{j}(M, t)$ pour $t > 0$.
- Vérifier la compatibilité des résultats obtenus avec la relation locale de conservation de la charge et avec les équations de Maxwell.

On donne, pour un champ vectoriel $\vec{a} = a(r, t)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques $\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 a}{\partial r}$.

- En déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique, le vecteur de Poynting et la puissance volumique fournie par le champ électromagnétique aux particules α . Commenter.