Propagation dans les milieux linéaires

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ On considère la propagation d'une OPPM transverse dans un plasma, que l'on décrit en notation complexe par $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}))$. On rappelle la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}.$$

1. Cas où $\omega > \omega_P$.
   (a) À partir des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, donner la structure de l'OPPM électromagnétique dans le plasma, en faisant intervenir la vitesse de phase v_φ et la direction de propagation $\overrightarrow{u}$.
   (b) Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde, ainsi que la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique.
   (c) Exprimer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie cinétique des électrons (on prendra une densité particulaire n_0 pour les électrons de masse m_e et de charge $-e$) sous l'action de l'onde.
   En déduire la densité volumique moyenne d'énergie totale, puis la vitesse de propagation de cette énergie.
2. Cas où $\omega < \omega_P$
   (a) D'après la relation de dispersion, le module d'onde est désormais imaginaire pur. Donner son expression dans le cas où la propagation se fait selon la direction $\overrightarrow{u_z}$. Quel signe faut-il choisir pour que l'onde obtenue ait un sens physique ? Exprimer le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ dans ce cas. Donner l'expression du champ électrique résultant et commenter sa forme mathématique.
   (b) Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à une telle onde.

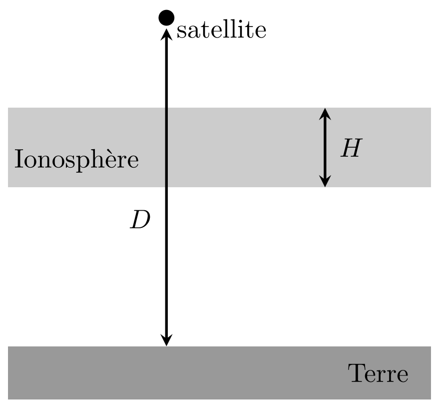
$\boxed{2}$ Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité γ. Le champ électrique est $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \overrightarrow{u_x}$.

1. En utilisant une équation de Maxwell trouver l'expression du champ magnétique.
2. Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting, $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$.
3. Calculer la moyenne temporelle de la puissance volumique dissipée par effet Joule, $\langle P_{V,J}\rangle$.
4. Vérifier que $\operatorname{div}\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle + \langle P_{V,J}\rangle = 0$. Interpréter physiquement cette relation.

Exercices

1. Système GPS et ionosphère

Le système de localisation GPS (Global Positioning System) est si précis qu'il est nécessaire de prendre en compte la dispersion due à la traversée de l'ionosphère. L'ionosphère, d'épaisseur H, est un plasma globalement neutre : il contient des électrons de masse m, de charge $-e$ et de densité particulaire n, ainsi que des ions de masse M, de charge $+e$ et de densité particulaire n. On supposera que le plasma est suffisamment dilué pour considérer que ses éléments constitutifs ne sont pas en interaction.



1. On envisage une onde plane progressive monochromatique de la forme $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}))$. Établir la relation de dispersion du plasma, ainsi que l'expression de la pulsation de coupure ω_P. Pourquoi la nomme-t-on ainsi ?
2. On envoie un train d'onde depuis un satellite vers la Terre. Donner l'expression de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe en fonction de la fréquence f de l'onde et de la fréquence plasma f_P. On suppose que l'atmosphère est assimilable à du vide vis-à-vis de l'onde envisagée. Calculer le temps τ que le train d'onde met pour parcourir la distance D qui sépare le satellite du sol. On supposera que $f \gg f_P$, ce qui permet un développement limité pour simplifier l'expression obtenue.
3. Pour prendre en compte la dispersion ionosphérique, on envoie deux trains d'onde de fréquences f_1 et f_2 et on mesure l'écart Δt entre leurs temps de parcours. Exprimer Δt lorsque $f_2 > f_1 \gg f_P$.
4. Montrer que $D = c\tau - d$, avec $d = \dfrac{f_1^2 f_2^2 c\Delta t}{f^2(f_2^2 - f_1^2)}$. On trouve que d est de l'ordre de quelques mètres. Commenter.

2. Effet de peau

Un milieu conducteur de conductivité réelle $\gamma = 5,6 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$, caractérisé par la permittivité diélectrique $\epsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ SI et par la perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\ \pi 10^{-7}$ SI, occupe le demi-espace $x > 0$ et est limité par le plan $x = 0$.

Ce conducteur est placé dans un champ électromagnétique sinusoïdal de fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ et invariant par translation selon les axes Oy et Oz.

On se placera dans tout le problème aux fréquences $f < f_0$, fréquence pour laquelle le module du courant de déplacement est égal au millième du module du courant de conduction.

1. Calculer la fréquence f_0. Commenter.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ en $M(x,y,z)$ à l'instant t à l'intérieur du conducteur. Quelle équation différentielle aurait-on obtenue sans négliger le courant de déplacement ?
3. Les lignes de courant dans ce conducteur sont parallèles à l'axe Oy.
   (a) Montrer qu'au point $M(x,y,z)$, la densité de courant volumique est de la forme :
   $$\overrightarrow{j}(x,t) = j_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\ \cos(2\pi f t - kx)\overrightarrow{u_y}$$
   où les coefficients δ et k seront exprimés en fonction de f et γ.
   (b) Justifier la dénomination d'"épaisseur de peau" attribuée à δ.
4. (a) Exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(x,t)$ dans le conducteur en M.
   On donne $\sin(a) - \cos(a) = \sqrt{2}\sin(a - \pi/4)$ *et* $\sin(a) + \cos(a) = \sqrt{2}\cos(a - \pi/4)$.
   (b) En déduire la puissance moyenne P_R rayonnée à travers une surface plane S située dans le plan d'abscisse x, en fonction de S, j_0, x, δ et γ, puis calculer $P_R(x = 0)$.
5. Exprimer la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule dans le paralléllépipède délimité par les plans $x = 0$ et $x \to \infty$ et de section S.
6. Comparer $P_R(x = 0)$ et P_J. Conclure.

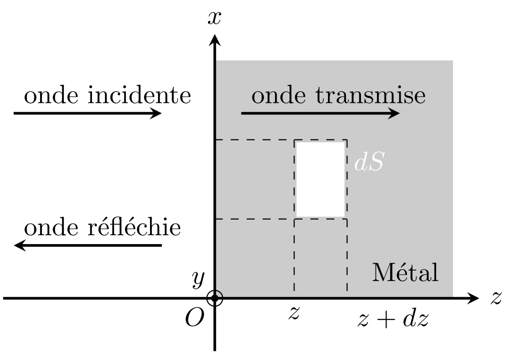
3. Pression de radiation

Une OPPM de pulsation ω tombe en incidence normale sur la surface (plan $z = 0$) d'un métal de conductivité γ. Elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise dans le métal dont le champ magnétique est, dans l'approximation des basses fréquences :

$$\overrightarrow{B_t}(M,t) = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \overrightarrow{u_y}$$

avec

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$



1. Déterminer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ dans le métal (on négligera le courant de déplacement).
2. On considère que le métal contient des ions de charge $q_i = +e$ fixes et dont le nombre par unité de volume est n_i, ainsi que des électrons de charge $q_e = -e$, animés localement tous de la même vitesse $\overrightarrow{v_e}$ et dont le nombre par unité de volume est n_e.

   (a) Exprimer la force exercée par le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E_t}, \overrightarrow{B_t})$ sur un ion et sur un électron.
   (b) Pourquoi a-t-on localement $n_e = n_i$?
   (c) Montrer que la force électromagnétique s'exerçant sur un élément de volume du métal est $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{f_V} d\tau$ avec $\overrightarrow{f_V} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B_t}$ (densité volumique de force électromagnétique).
   (d) Exprimer $\langle \overrightarrow{f_V} \rangle$, moyenne temporelle de $\overrightarrow{f_V}$ en fonction de B_0, δ et z.
3. On considère, à l'intérieur du métal, un petit parallélépipède de longueur dz et de base de surface dS parallèle à l'interface. Exprimer la force moyenne $\overrightarrow{d^2F}$ qui s'exerce dessus. En déduire l'expression de la force moyenne totale $\overrightarrow{dF}$ s'exerçant sur tout le métal s'appuyant sur dS en fonction de B_0.
4. Dans la limite $\delta \to 0$, on peut considérer que cette force s'applique sur la surface dS. Exprimer la pression correspondante, appelée pression de radiation, en fonction de $\langle u_{em} \rangle$ densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne dans le vide au niveau de la surface du métal, en admettant que le champ magnétique dans le vide est $\overrightarrow{B}_{vide} = B_0 \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) \cos(\omega t) \overrightarrow{u_y}$.

4. Onde hertzienne dans l'eau de mer

On étudie la propagation d'ondes hertziennes dans l'eau de mer. On admet que l'eau est localement neutre ($\rho = 0$). Sa permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ et sa conductivité $\sigma = 6,23\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$ sont supposées réelles.

1. Quel est le domaine de fréquence des ondes hertziennes ? Donner les équations de Maxwell dans le milieu diélectrique (il suffit de remplacer ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$). Comment se situe la conductivité du cuivre comparée à celle de l'eau de mer ?
2. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. On cherche une solution sous la forme $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp[i(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \vec{r})]$.
3. Établir la relation de dispersion.
4. Déterminer la fréquence de coupure au-delà de laquelle il n'y a pas absorption. Quelle est la vitesse de phase dans ce cas ?
5. La fréquence d'une onde est $f = 100$ MHz. Déterminer l'expression de la pulsation spatiale k. Déterminer la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase. Y a-t-il dispersion ? Pourquoi n'utilise-t-on pas d'ondes hertziennes pour les communications sous-marines ?

5. Transparence ultraviolette des métaux

Un métal est éclairé sous incidence normale par une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique. On adopte le modèle de conduction de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau sur les électrons de conduction est de la forme $-\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$. On note n^* le nombre volumique d'électrons libres.

Données : $n^* \simeq 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$, $\gamma = 6 \cdot 10^8\ \Omega.\mathrm{m}^{-1}$, $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $\tau \simeq 10^{-14}$ s.

1. Montrer que le métal possède une conductivité complexe :

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$$

   Quelle convention a été choisie pour la notation complexe du champ électrique pour obtenir cette expression ?
2. On rappelle que le métal est localement neutre. En déduire la relation de dispersion des pseudo-OPPH :

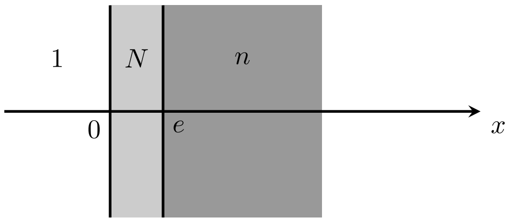
$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \underline{\sigma} \omega = \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{1 + i\omega\tau}$$

3. <u>Dans l'ultra-violet :</u> montrer que $\omega\tau \gg 1$ et interpréter le fait que certains métaux sont transparents dans l'UV.

4. Dans le visible : montrer qu'on a encore $\omega\tau \gg 1$ et interpréter le fait que les métaux bons conducteurs sont aussi des miroirs dans le visible.
5. Dans les micro-ondes et dans les grandes ondes : montrer que $\omega\tau \ll 1$ et interpréter le fait que les métaux bons conducteurs absorbent en partie les micro-ondes et les grandes ondes.

6. Traitement anti-reflet

À la surface d'un verre d'indice n, on dépose une couche d'épaisseur e et d'indice N pour éviter qu'une onde réfléchie (un reflet) ne soit créée lorsque le faisceau pénètre dans le verre. L'air occupe la zone $x < 0$, la couche anti-reflet la zone $0 < x < e$, et le verre la zone $x > e$. Une Onde Plane Progressive Harmonique de pulsation ω, polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_z}$ arrive sur de système, en incidence normale. On cherche les conditions pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie.



Les ondes dans les trois zones de l'espace sont notées :

- $\overrightarrow{E}(x < 0, t) = \alpha_a \exp(j(\omega t - k_0 x))\overrightarrow{u_y}$
- $\overrightarrow{E}(0 < x < e, t) = [\alpha_c \exp(j(\omega t - k_0 N x)) + \beta_c \exp(j(\omega t + k_0 N x))]\,\overrightarrow{u_y}$
- $\overrightarrow{E}(x > e, t) = \alpha_v \exp(j(\omega t - k_0 n x))\overrightarrow{u_y}$

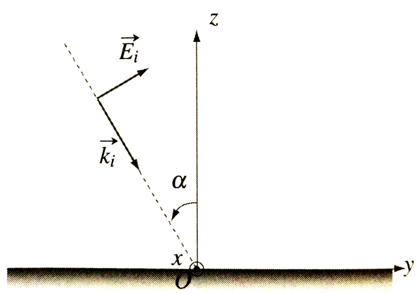
où $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$.

1. Commenter cette forme. Justifier en particulier la forme choisie ici pour le champ électrique dans la zone $x < 0$.
2. Donner l'expression du champ magnétique dans chacun des matériaux.
3. On admet la continuité des champs aux interfaces. Établir quatre relations reliant α_a, α_v, α_c et β_c.
4. Montrer alors que :
$$\frac{(N+1)(N-n)}{(N-1)(N+n)} = \exp(2jk_0 N e)$$
5. En déduire les valeurs qu'il faut choisir pour e et N pour qu'il n'y ait effectivement pas de reflet.
6. L'onde initiale donne en fait naissance à une onde réfléchie à chaque fois qu'elle rencontre un dioptre. Représenter sur un schéma (de la couche anti-reflet) les réflexions/transmissions successives subies par l'onde. Montrer que deux ondes successivement réfléchies vers l'arrière ($x < 0$) sont déphasées de π l'une par rapport à l'autre. En déduire une interprétation physique simple de l'effet anti-reflet.
7. Comment expliquer qu'il subsiste un reflet violet sur un objectif ainsi traité, lorsqu'on l'observe à la lumière du jour ?
8. Les résultats obtenus dépendent-ils de la polarisation de l'onde ?

Remarque : Il existe en réalité une grande variété de traitements anti-reflet (mono-couche, multicouches...), de traitements permettant d'obtenir de très bons miroirs "diélectriques" (traitement "reflet"), des filtres très sélectifs pour certaines longueurs d'ondes, etc... Ces techniques de "couches minces" ont de nombreuses applications en optique, à l'échelle industrielle.

7. Réflexion sur un métal sous incidence oblique

Une OPPM polarisée rectilignement, de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k_i}$ se propage dans le vide et arrive avec l'angle d'incidence $\alpha = (-\vec{u}_z, \vec{k_i})$ sur la surface d'un métal parfaitement conducteur qui occupe le demi-espace $z < 0$. $\vec{k_i}$ est contenu dans le plan (Oyz).



On suppose que le champ électrique de l'onde incidente est dans le plan d'incidence comme représenté sur la figure ci-dessus, sur laquelle il est représenté tel qu'il est à l'instant $t = 0$ au point O (les dimensions de la figure sont très inférieures à la longueur d'onde). Sa norme a alors une valeur maximale E_0.

1. Exprimer $\overrightarrow{E}_i(M,t)$.
2. Montrer qu'il doit exister une onde réfléchie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde k_r est donnée par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter $\vec{k}_r$.

   On utilise les relations de passage : $\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{1\to 2}}$; $\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$.
3. Montrer sans calcul que son champ électrique $\overrightarrow{E}_r$ est tel que $\|\overrightarrow{E}_r(O,t)\| = \|\overrightarrow{E}_i(O,t)\|$.
4. Représenter $\overrightarrow{E}_r$ et les champs magnétiques $\overrightarrow{B}_i$ et $\overrightarrow{B}_r$ des deux ondes tels qu'ils sont à $t = 0$ en O.
5. Exprimer $\overrightarrow{E}_r(M,t)$.

8. Lois de Descartes pour la réflexion sur un métal parfait d'une onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence

Un métal supposé parfaitement conducteur occupe le demi-espace $z > 0$ (le champ électromagnétique est nul au sein d'un conducteur parfait). Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se dirige vers ce plan dans le vide : c'est l'onde incidente. Par hypothèse, cette onde est supposée polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, c'est à dire suivant $(O,\overrightarrow{u_x})$ et son vecteur d'onde est dans le plan (yOz). Le champ électrique de cette onde a pour expression :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 \exp i(k_y y + k_z z - \omega t)\overrightarrow{u_x}$$

où $\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur unitaire porté par (Ox), et où $k_y > 0$ et $k_z > 0$.

1. On suppose que le champ réfléchi est lui aussi polarisé suivant (Ox) et correspond à l'expression générale

   $$\underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{E_1} \exp i(k'_x x + k'_y y + k'_z z - \omega t)\overrightarrow{u_x}.$$

   Justifier sans calcul la direction de polarisation de ce champ réfléchi ainsi que sa pulsation. On donne ci-dessous les relations de passage des champs au niveau d'une interface séparant deux milieux 1 et 2 :

   $$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{1\to 2}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$$

   où $\overrightarrow{n_{1\to 2}}$ est un vecteur unitaire normal à l'interface, orienté du milieu 1 vers le milieu 2. En utilisant les conditions aux limites pour $\overrightarrow{E}$, déterminer $\underline{E1}$ en fonction de E_0 ainsi que les composantes du vecteur d'onde $\overrightarrow{k'}$ en fonction des composantes de $\overrightarrow{k}$. Quelle loi retrouve-t-on ainsi ?
2. Donner les expressions des champs réels $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ totaux dans le demi-espace $z < 0$. Vérifier en particulier que la composante normale de $\overrightarrow{B}$ B est bien nulle à la surface du métal.
3. Déterminer les densités surfaciques de charge et de courant au niveau du plan conducteur.
4. On donne l'expression de la force de Laplace surfacique s'exerçant sur une interface parcourue par un courant surfacique :

   $$\frac{\overrightarrow{\mathrm{dF}}}{\mathrm{dS}} = \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{B_{surf}} \quad \text{où} \quad \overrightarrow{B_{surf}} = \frac{\overrightarrow{B}(z=0^-) + \overrightarrow{B}(z=0^+)}{2}$$

   On prend en compte ici la valeur moyenne entre les champs magnétiques de chaque côté de l'interface car celui-ci est discontinu au niveau de la surface.

   Calculer la force moyenne par unité de surface s'exerçant sur le métal en fonction de E_0, ϵ_0 et α, l'angle d'incidence. Expliquer pourquoi la grandeur calculée s'appelle la pression de radiation.
5. Commenter le texte ci-dessous à propos de la voile solaire Sunjammer dont le lancement était prévu en 2015 (abandonné en 2014) vers le point de Lagrange L_1 situé à 1,5 millions de kilomètres de la Terre, entre le Soleil et cette dernière (source : wikipedia) :

   Le satellite a la taille d'une machine à laver avant le déploiement de la voile solaire qui se fait en orbite. Malgré sa superficie - 38 × 38 m soit 4 fois et demi la superficie d'un terrain de tennis - la voile solaire, qui est épaisse de 5 microns ne pèse que 32 kg avec ses équipements. La voile exerce une poussée maximale de 0,1 Newton. Le contrôle d'attitude est réalisé sans propulseurs grâce à des portions de voile solaire orientables situées à chaque extrémité. Le satellite emporte deux petits instruments scientifiques destinés à mesurer le champ magnétique et le flux d'ions du vent solaire.

Donnée : constante solaire (flux du rayonnement solaire hors de l'atmosphère) : 1360 W.m^{-2}.