Question de cours : dipôle magnétostatique

Moment magnétique d'une boucle de courant plane. Moment magnétique et moment cinétique d'un atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr. Magnéton de Bohr.

Exercice : Étude d'un solénoïde épais

On considère un bobinage uniforme comprenant n spires par unité de longueur réparties en plusieurs couches (m couches par unité d'épaisseur). Le bobinage est effectué sur un cylindre de rayon R_1 ; le rayon externe du bobinage est R_2. On note I l'intensité du courant dans la bobine.

1. Par une étude de symétrie détaillée, donner la direction du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ en un point quelconque.
2. Le champ magnétique à l'extérieur de la bobine est nul. Déterminer le champ magnétique en un point quelconque de l'espace.

Semaine de colle n^o 18

Question de cours : Les équations de Maxwell

Formes locales, formes intégrales, sens physique.

Exercice : Distribution à géométrie cylindrique

On considère, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique $\vec{B}$ défini par :

$$\overrightarrow{B} = B_0 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r-a}{a}\right)\overrightarrow{e_\theta} \text{ pour } 0 \leq r \leq a$$

et

$$\overrightarrow{B} = B_0 \frac{a}{r}\overrightarrow{e_\theta} \text{ pour } r > a.$$

Déterminer les courants qui sont à l'origine de ce champ. (Le milieu considéré sera supposé comme étant équivalent au vide : $\mu = \mu_0$).

Données : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

Question de cours : Équation locale de Poynting

Grandeurs énergétiques associées au champ électromagnétique. Équation de conservation.

Exercice : Milieu supraconducteur

Un milieu supraconducteur $x > 0$ peut être modélisé par la distribution de courant suivante : $\overrightarrow{j}(M) = j_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right)\overrightarrow{u_y}$ pour $x > 0$ et $\overrightarrow{j}(M) = \overrightarrow{0}$ pour $x < 0$.
Déterminer, en tout point de l'espace, le champ magnétique créé par le supraconducteur.

On exploitera le fait que pour $x \gg a$ le distribution de courant peut être vue comme une nappe de courant.

Semaine de colle n^o 18

Question de cours : Les équations de Maxwell

Formes locales, formes intégrales, sens physique.

Exercice : Bobinage torique

Soit un tore engendré par la rotation d'un carré de côté $2a$ autour de l'axe Oz. En coordonnées cylindriques, les points intérieurs au tore ont pour coordonnées (r, θ, z) telles que :

$$r \in [\ell - a, \ell + a]; \theta \in [0, 2\pi]; z \in [-a, a].$$

Ce tore est constitué d'une substance de perméabilité μ_0. On enroule régulièrement N spires à la surface de ce tore ; le bobinage est parcouru par un courant d'intensité i.

1. Déterminer l'expression du champ magnétique en coordonnées cylindriques pour un point quelconque de l'espace.
2. Calculer le flux propre dans le bobinage.
3. En déduire le coefficient d'autoinduction L de la bobine ainsi constituée. Application numérique : $2a = 1{,}8$ cm ; $\ell = 5$ cm ; $N = 500$.
4. On place sur l'axe Oz du tore un fil très long devant les dimensions du tore ; déterminer le coefficient d'inductance mutuelle entre le fil et le tore.

Semaine de colle n^o 18

Étude d'un solénoïde épais

1. Hors du bobinage, la densité de courant est nulle.
   - Pour $r < R_1$: $j(r) = 0$
   - Pour $r > R_2$: $j(r) = 0$
   - Pour $R_1 < r < R_2$, le courant circule dans les fils. Dans l'élément de volume $d\tau = dr r d\theta dz$ circule le courant porté par dN spires, avec

$$dN = \frac{dr}{R_2 - R_1} n dz$$

L'élément de courant dans cet élément de volume est

$$\begin{aligned} j(r) d\tau \overrightarrow{e_\theta} &= dN I r d\theta \overrightarrow{e_\theta} \\ &= \frac{dr}{R_2 - R_1} n dz I r d\theta \overrightarrow{e_\theta} \end{aligned}$$

En identifiant les deux expressions de l'élément de courant, on en déduit

$$j(r) = \frac{nI}{R_2 - R_1}$$

2. Tout plan orthogonal à l'axe du solénoïde est plan de symétrie pour les courants, donc d'antisymétrie pour $\overrightarrow{B}$. Il en résulte que $\overrightarrow{B}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_z}$.

3. Si on néglige les effets de bord, il y a invariance par translation parallèlement à $\overrightarrow{e_z}$, donc $\overrightarrow{B}$ est indépendant de z. Il y a enfin invariance par rotation autour de Oz, donc $\overrightarrow{B}$ est indépendant de θ. Il reste

$$\overrightarrow{B} = B(r) \overrightarrow{e_z}$$

4. Le rotationnel de $\overrightarrow{B}$ se calcule aisément :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{B} = B'(r) \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_z} = -B'(r) \overrightarrow{e_\theta}$$

donc l'équation de Maxwell-Ampère est bien adaptée et conduit à

$$-B'(r) = \mu_0 j(r)$$

- Pour $r < R_1$: $B'(r) = 0$ soit, en intégrant $B(r) = B_{int}$.
- Pour $r > R_2$: $B'(r) = 0$ soit, en intégrant $B(r) = B_{ext}$.
- Pour $R_1 < r < R_2$, $B'(r) = -\dfrac{\mu_0 n I}{R_2 - R_1}$ soit, en intégrant

$$B(r) = B_0 - \frac{\mu_0 n I r}{R_2 - R_1}$$

En utilisant la continuité de B en R_1 et en R_2, il nous manque une équation. On peut utiliser le résultat du cours établissant que le champ à l'extérieur d'un solénoïde mince est nul. Ce solénoïde épais peut être vu comme un assemblage de solénoïdes minces coaxiaux. Un point extérieur au solénoïde épais est à l'extérieur de tous les solénoïdes minces constitutifs, donc $B_{ext} = 0$. On en déduit successivement

$$\overrightarrow{B}(r) = \left| \begin{array}{ll} \overrightarrow{0} & \text{pour } r > R_2 \\ \dfrac{\mu_0 n I (R_2 - r)}{R_2 - R_1} \overrightarrow{e_z} & \text{pour } R_1 < r < R_2 \\ \mu_0 n I \overrightarrow{e_z} & \text{pour } r < R_1 \end{array} \right.$$

 Semaine de colle n^o 18

Distribution à géométrie cylindrique

$\overrightarrow{B}$ est continu en $r = a$; il n'existe donc pas de courants surfaciques en $r = a$. La distribution de courants est décrite par une densité volumique qui s'obtient par l'équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j}$$

— pour $r > a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = B_0 a\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}\right) = \overrightarrow{0}$ donc

$$\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$$

— pour $r < a$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} &= \frac{B_0 e}{a^3}\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(r^4 e^{-r/a}\frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}\right)\\ &= \frac{B_0 e}{a^3}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(r^4 e^{-r/a}) \wedge \frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}\\ &= \frac{B_0 e}{a^3}\left(4r^3 - \frac{r^4}{a}\right)e^{-r/a}\frac{\overrightarrow{e_z}}{r}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{j} &= \frac{B_0 e r^2}{\mu_0 a^3}\left(4 - \frac{r}{a}\right)e^{-r/a}\overrightarrow{e_z}\\ &= \frac{B_0 r^2}{\mu_0 a^3}\left(4 - \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r-a}{a}\right)\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

Bobinage torique

1. M étant un point quelconque de l'espace, le plan $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ est un plan de symétrie pour les courants, donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique. $\overrightarrow{B}$ est donc colinéaire à $\overrightarrow{e_\theta}$. Compte tenu de l'invariance par rotation autour de l'axe Oz, le champ magnétique est de la forme

$$\overrightarrow{B}(M) = B(r,z)\overrightarrow{e_\theta}$$

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'axe Oz et de rayon r, orienté par $\overrightarrow{e_\theta}$; le théorème d'Ampère s'écrit

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{\mathcal{C}}$$

où $I_{\mathcal{C}}$ est l'intensité enlacée par ce cercle. La circulation de $\overrightarrow{B}$ est

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = 2\pi r B(r,z)$$

tandis que l'intensité enlacée est

$$I_{\mathcal{C}} = \left|\begin{array}{l} Ni \text{ si } \mathcal{C} \text{ est à l'intérieur de la bobine}\\ 0 \quad \text{si } \mathcal{C} \text{ est à l'extérieur de la bobine}\end{array}\right.$$

On en déduit le champ magnétique

$$\overrightarrow{B} = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\mu_0 Ni}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta} & \text{si } \mathcal{C} \text{ est à l'intérieur de la bobine}\\ \overrightarrow{0} & \text{si } \mathcal{C} \text{ est à l'extérieur de la bobine}\end{array}\right.$$

2. Le flux propre dans le bobinage est

$$\Phi_0 = N\phi_1$$

où ϕ_1 est le flux du champ propre à travers une spire, soit

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \int_{\ell-a}^{\ell+a}\frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}\cdot\overrightarrow{e_\theta}2a dr\\ &= \frac{\mu_0 Nia}{\pi}\ln\frac{\ell+a}{\ell+a}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\Phi_0 = \frac{\mu_0 N^2 ia}{\pi}\ln\frac{\ell+a}{\ell+a}$$

3. Le coefficient d'inductance propre de la bobine est défini par

$$\Phi_0 = Li$$

soit

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \frac{\ell + a}{\ell + a}$$

Numériquement, on obtient $L = 0,33$ mH

4. Imaginons que le fil est parcouru par un courant d'intensité I. Le champ magnétique créé par le fil est

$$\overrightarrow{B'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \overrightarrow{e_\theta}$$

Son flux à travers une spire est

$$\phi_1' = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \ln \frac{\ell + a}{\ell + a}$$

et à travers la bobine complète

$$\Phi' = N\phi_1' = \frac{\mu_0 N I a}{\pi} \ln \frac{\ell + a}{\ell + a}$$

Le coefficient d'inductance mutuelle entre le fil et la bobine est

$$M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln \frac{\ell + a}{\ell + a} = \frac{L}{N}$$

Semaine de colle n^o 18