Semaine de colle n^o 17

Question de cours : Analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel

Expression des forces d'interaction, des champs et des potentiels associés. Théorème de Gauss pour le champ gravitationnel.

Exercice : Champ dans une cavité cylindrique

Un cylindre infini d'axe O_1z possédant une charge volumique uniforme ρ, présente une cavité cylindrique infinie (d'axe O_2z avec O_2 différent de O_1) vide de charges.

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique pour un cylindre infini plein, d'axe Oz, de charge volumique uniforme ρ.
2. Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité du cylindre creux. Déterminer son expression.

Question de cours : Condensateur plan

On admet l'expression de champ électrostatique créé par un plan infini chargé uniformément en $z = 0$ ($\overrightarrow{E} = \pm \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\overrightarrow{u_z}$). Champ créé par par un condensateur plan. Capacité d'un condensateur plan. Aspect énergétique.

Exercice : Distribution volumique entre deux sphères concentriques

On considère une charge q positive répartie en volume entre deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2. On appelle $\rho(r)$ la densité volumique de charges entre R_1 et R_2. Le champ électrostatique se met sous la forme : $\overrightarrow{E}(r) = a(r - R_1)\overrightarrow{u_r}$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$ avec a une constante. On donne, pour un champ à symétrie sphérique :

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{dE_r}{dr} + \frac{2E_r}{r} \quad \text{avec} \quad E_r = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

1. Déterminer $\rho(r)$ en fonction de a, r, R_1 et ϵ_0.
2. Déterminer a en fonction de q, ϵ_0, R_1 et R_2.
3. Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace. Représenter graphiquement E_r en fonction de r.

Semaine de colle n^o 17

Question de cours : Boule uniformément chargée

Déterminer l'énergie de constitution d'une boule uniformément chargée en la construisant par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.

Exercice : Modélisation de la jonction PN d'une diode ou d'un transistor

Lorsqu'un semi-conducteur présente, dans une région très localisée de l'espace, une variation très brutale de la concentration en dopant, voire un changement de la nature du dopant, on dit qu'on a une jonction. Au voisinage de la jonction, dans une région dite « zone de charge », le cristal acquiert une distribution de charge électrique non nulle que l'on se propose d'étudier. Les propriétés qui en résultent sont à la base de la caractéristique de diodes, des transistors et de tous les circuits intégrés (ampli op en particulier).

1. On considère un plan infini d'équation $z = 0$, portant une densité surfacique de charge σ constante. Ce plan est plongé dans un milieu quasi-isolant dans lequel la permittivité électrique est $\epsilon_r\epsilon_0$. Déterminer le champ électrique créé en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

   On se place dans le germanium, de permittivité relative ϵ_r et on suppose que la densité volumique de charge ρ invariante en x et en y autour d'une jonction située dans le plan $z = 0$ a l'allure de la figure 1 :

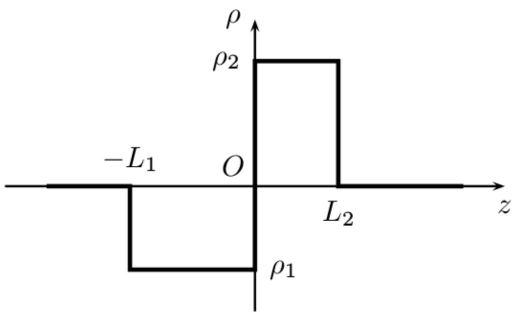

FIGURE 1 – Modélisation volumique de la jonction **PN**

2. Sachant que la distribution de charge est globalement neutre, établir la relation vérifiée par L_1, L_2, ρ_1 et ρ_2.
3. Déterminer le champ électrique en tout point M de l'espace. On utilisera le fait que le champ électrique est nul pour un point M situé à l'infini.
4. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$. On choisira l'origine des potentiels en $z = 0$.
5. Représenter $V(z)$.
6. Donner l'expression de la différence de potentiel V_0 entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charge.
7. La région ($z > 0$) a été dopée avec de l'antimoine à raison de $N_2 = 1,6 \times 10^{21}$ atomes Sb par m^3, tandis que la région ($z < 0$) a été dopée avec du bore, avec un nombre d'atomes $N_1 \gg N_2$. On admet que dans la zone de charge, chaque atome Sb est ionisé en Sb^+. Les électrons ainsi libérés traversent spontanément le plan $z = 0$ et chaque atome de bore situé dans la zone de charge se transforme en un anion B^-. En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_1 et N_2.
8. Le système ainsi constitué est une diode à jonction dont la tension de seuil est voisine de V_0. En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charge.
9. Application numérique : calculer δ ; on donne : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10{-}12$ F.m^{-1} ; $\epsilon_r = 16$; $V_0 = 0,3$ V et $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

Semaine de colle n^o 17

Question de cours : Dipôle électrostatique

Description. Potentiel créé. Champ créé.

Distribution sphérique non homogène

En coordonnées sphériques, on considère une distribution de charges à symétrie sphérique, définie par :

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_0 R/r & \text{pour } r \in [0, R]; \\ \rho(r) = 0 & \text{pour } r \in [R, \infty[\end{cases}$$

1. Déterminer la charge $Q(r)$ contenue dans la sphère de centre O et de rayon r pour $r \in [0, \infty[$.
2. Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le potentiel V en tout point de l'espace.
3. Calculer l'énergie électrostatique de cette distribution de charges.

Question de cours : Dipôle électrostatique

Description. Potentiel créé. Champ créé.

Distribution sphérique non homogène

On considère le champ électrique d'expression en coordonnées sphériques

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = \dfrac{E_0 a^2}{2r^2}\overrightarrow{e_r} & \text{pour} \quad r > a \\ \\ \overrightarrow{E} = \dfrac{E_0}{2}\overrightarrow{e_r} & \text{pour} \quad r < a \end{cases}$$

1. Décrire la distribution de charges électriques à l'origine de ce champ.

2. Déterminer le potentiel électrostatique correspondant.

3. Calculer l'énergie électrostatique du système.

 Semaine de colle n^o 17

Question de cours : Boule uniformément chargée

Déterminer l'énergie de constitution d'une boule uniformément chargée en la construisant par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.

Systèmes à symétrie plane

L'espace est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

1. Soit une distribution de charges indépendante de y et z. Que peut-on dire du champ électrique créé par cette distribution de charges ?

2. Déterminer le champ électrique créé par un plan uniformément chargé de charge surfacique σ.

3. On étudie maintenant la distribution de charges :

$$\begin{cases} \rho(x) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) & \text{pour} \quad x \in]-a, a]; \\ \rho(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[\end{cases}$$

Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le potentiel V en tout point de l'espace.

Champs de révolution ; optique électronique

Soit une région vide de charges dans laquelle règne un champ électrique : $\overrightarrow{E} = E_r\overrightarrow{e_r} + E_z\overrightarrow{e_z}$ présentant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz. Montrer que, au voisinage de l'axe : $E_r = -\dfrac{r}{2}\dfrac{\partial E_z}{\partial z}$.

Distribution sphérique non homogène

1. Pour $r \in [0, R[$, la charge $Q(r)$ contenue dans la sphère de centre O et de rayon r est

$$Q(r) = \int_0^r \frac{\rho_0 R}{r'} 4\pi r'^2 dr' = \rho_0 R \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi\rho_0 R r^2$$

Pour $r > R$, on a

$$Q(r) = Q(R) = 2\pi\rho_0 R^3$$

2. On applique le théorème de Gauss à la sphère de centre O et de rayon r ; on obtient

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

soit

— pour $r < R$:

$$E(r) = \frac{\rho_0 R}{2\epsilon_0}$$

— pour $r > R$:

$$E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{2\epsilon_0 r^2}$$

— pour $r \geq R$, la dérivée du potentiel est

$$V'(r) = -\frac{\rho_0 R^3}{2\epsilon_0 r^2}$$

En prenant l'origine des potentiels à l'infini, on obtient en intégrant

$$V(r) = \frac{\rho_0 R^3}{2\epsilon_0 r}$$

— pour $r \leq R$, la dérivée du potentiel est

$$V'(r) = -\frac{\rho_0 R}{2\epsilon_0}$$

En intégrant entre R et r, on obtient

$$V(r) - V(R) = -\frac{\rho_0 R(r-R)}{2\epsilon_0}$$

Le potentiel étant continu pour $r = R$, on a

$$V(R) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}$$

soit

$$V(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{r}{2R}\right)$$

En récapitulant, on obtient

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 R}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_r} & \text{et } V(r) = \dfrac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{r}{2R}\right) & \text{pour } r \in [0, R]; \\ \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 R^3}{2\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r} & \text{et } V(r) = \dfrac{\rho_0 R^3}{2\epsilon_0 r} & \text{pour } r \in]R, \infty[\end{cases}$$

3. L'énergie électrostatique de cette distribution de charges peut se calculer par différentes méthodes.

— Première méthode : intégration de la densité volumique d'énergie électrostatique

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2}\iiint \epsilon_0 E^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\rho_0^2 R^2}{4\epsilon_0} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\int_R^\infty \frac{\rho_0^2 R^6}{4\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\pi\rho_0^2 R^2}{2\epsilon_0}\int_0^R r^2 dr + \frac{\pi\rho_0^2 R^6}{2\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\pi\rho_0^2 R^2}{2\epsilon_0}\frac{R^3}{3} + \frac{\pi\rho_0^2 R^6}{2\epsilon_0}\frac{1}{R} \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

— Seconde méthode : intégration de l'énergie potentielle des charges constitutives

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2}\iiint \rho(r)V(r) d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\rho_0 R}{r}\frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{r}{2R}\right) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\rho_0^2 R^3}{2\epsilon_0} 4\pi \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{2R}\right) dr \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2 R^3}{\epsilon_0}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{6}\right] \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Distribution sphérique non homogène

1. On utilise l'équation de Maxwell-Gauss.
   — Pour $r > a$

$$\begin{aligned}\rho &= \epsilon_0 \operatorname{div} \overrightarrow{E} \\ &= \epsilon_0 E_0 a^2 \operatorname{div}\left(\frac{\overrightarrow{e_r}}{r^2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

   Il n'y a pas de charges à l'extérieur de la sphère de centre O et de rayon a.
   — Pour $r = a$: le champ électrique est discontinu ; il y a donc une distribution de charges surfaciques dont on détermine la densité surfacique σ en utilisant la relation de passage

$$\overrightarrow{E}(a^+) - \overrightarrow{E}(a^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$$

   On en déduit

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{E_0}{2}$$

   — Pour $r < a$

$$\begin{aligned}\rho &= \epsilon_0 \operatorname{div} \overrightarrow{E} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0}{2} \operatorname{div}\left(r^2 \frac{\overrightarrow{e_r}}{r^2}\right) \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, r^2 \cdot \frac{\overrightarrow{e_r}}{r^2} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0}{r}\end{aligned}$$

2. Le potentiel étant continu en $r = a$, il suffit d'examiner le domaine extérieur et le domaine intérieur.
   — Pour $r > a$, on a $V'(r) = -\dfrac{E_0 a^2}{r^2}$ soit, en intégrant entre ∞ et r, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini :

$$V(r) = E_0 \frac{a^2}{r}$$

   — Pour $r < a$, on a $V'(r) = -\dfrac{E_0}{2}$ soit, en intégrant entre a et r :

$$V(r) = V(a) - \frac{E_0}{2}(r - a)$$

   Le potentiel étant continu en $r = a$, on obtient

$$V(r) = E_0 a - \frac{E_0}{2}(r-a) = \frac{3E_0 a}{2}\left(1 - \frac{r}{3a}\right)$$

3. L'énergie électrostatique de cette distribution de charges peut se calculer par différentes méthodes.
   — Première méthode : intégration de la densité volumique d'énergie électrostatique

$$\begin{aligned}U_E &= \frac{1}{2}\iiint \epsilon_0 E^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{\epsilon_0 E_0^2 a^4}{r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\pi\epsilon_0 E_0^2}{2}\int_0^a r^2 dr + 2\pi\epsilon_0 E_0^2 a^4 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\pi\epsilon_0 E_0^2}{2}\frac{a^3}{3} + 2\pi\epsilon_0 E_0^2 a^4 \frac{1}{a} \\ &= \frac{13}{6}\pi\epsilon_0 E_0^2 a^3\end{aligned}$$

   — Seconde méthode : intégration de l'énergie potentielle des charges constitutives

$$\begin{aligned}U_E &= \frac{1}{2}\iiint \rho(r)V(r)d\tau + \frac{1}{2}\iint \sigma V(a) dS \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\epsilon_0 E_0}{r}\frac{3E_0 a}{2}\left(1 - \frac{r}{3a}\right) 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{E_0}{2} 4\pi a^2 E_0 a \\ &= 3\pi\epsilon_0 E_0^2 a \int_0^a \left(r - \frac{r^2}{3a}\right) dr + \pi\epsilon_0 E_0^2 a^3 \\ &= 3\pi\epsilon_0 E_0^2 a \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{9}\right] + \pi\epsilon_0 E_0^2 a^3 \\ &= \frac{13}{6}\pi\epsilon_0 E_0^2 a^3\end{aligned}$$

Systèmes à symétrie plane

1. Le champ électrique est invariant par translation selon $\overrightarrow{e_y}$ et selon $\overrightarrow{e_z}$. Le champ électrique ne dépend donc que de x. M étant un point quelconque de l'espace, les plans $(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et $(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ sont des plans de symétrie. $\overrightarrow{E}(M)$ doit donc être parallèle à chacun de ces plans. Il est donc dirigé selon $\overrightarrow{e_x}$. Au final, on peut écrire

$$\overrightarrow{E}(M) = E(x)\overrightarrow{e_x}$$

2. Choisissons $\overrightarrow{e_x}$ comme vecteur normal au plan chargé. On peut alors utiliser le résultat établi précédemment, soit

$$\overrightarrow{E}(M) = E(x)\overrightarrow{e_x}$$

Choisissons $x = 0$ sur le plan. Ce plan est un plan de symétrie. La fonction $E(x)$ est donc impaire. L'équation de Maxwell-Gauss donne

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \text{ pour } x > 0 \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \text{ pour } x < 0 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{l} E'(x) = 0 \text{ pour } x > 0 \\ E'(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \end{array}\right.$$

En intégrant, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} E(x) = E_+ \text{ pour } x > 0 \\ E(x) = E_- \text{ pour } x < 0 \end{array}\right.$$

E_+ et E_- sont deux constantes d'intégration ; la fonction $E(x)$ étant impaire, $E_- = -E_+$; on détermine alors E_+ en utilisant la relation de passage à la traversée du plan chargé.

$$\overrightarrow{e_x} \cdot (E_+\overrightarrow{e_x} - (-E_+\overrightarrow{e_x})) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On en déduit

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_x} \text{ pour } x > 0 \\ \overrightarrow{E} = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_x} \text{ pour } x < 0 \end{array}\right.$$

3. L'équation de Maxwell-Gauss donne

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0 & \text{pour } x > a \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) & \text{pour } |x| < a \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0 & \text{pour } x < -a \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{ll} E'(x) = 0 & \text{pour } x > a \\ E'(x) = \dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) & \text{pour } |x| < a \\ E'(x) = 0 & \text{pour } x < -a \end{array}\right.$$

En intégrant, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} E(x) = E_+ & \text{pour } x > a \\ E(x) = E(0) + \dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(x - \dfrac{x^3}{3a^2}\right) & \text{pour } |x| < a \\ E(x) = E_- & \text{pour } x < -a \end{array}\right.$$

Le plan d'équation $x = 0$ est un plan de symétrie pour les charges ; c'est donc un plan de symétrie pour le champ électrique. La fonction $E(x)$ est donc impaire, ce qui impose $E(0) = 0$.
Cette distribution est volumique ; le champ électrique est donc continu en $x = \pm a$; on peut donc éliminer E_+ par

$$E_+ = E(a) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{2\rho_0}{3\epsilon_0}$$

La parité donne alors $E_- = -E_+$. On a donc finalement

$$\overrightarrow{E} = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{2\rho_0}{3\epsilon_0}\overrightarrow{e_x} & \text{pour } x > a \\ \dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(x - \dfrac{x^3}{3a^2}\right)\overrightarrow{e_x} & \text{pour } |x| < a \\ -\dfrac{2\rho_0}{3\epsilon_0}\overrightarrow{e_x} & \text{pour } x < -a \end{array}\right.$$

 Semaine de colle n^o 17

Champs de révolution ; optique électronique

Le champ présentant la symétrie de révolution, on a

$$\overrightarrow{E} = E_r(r,z)\overrightarrow{e_r} + E_z(r,z)\overrightarrow{e_z}$$

La composante radiale s'annule en $r = 0$. On peut donc l'écrire sous la forme

$$E_r(r,z) = ru(z)$$

en se limitant à l'ordre 1 en r. La divergence du champ électrique est

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} &= \mathrm{div}\,(ru(z)\overrightarrow{e_r}) + \mathrm{div}\,(E_z(r,z)\overrightarrow{e_z}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u(z)\cdot r\overrightarrow{e_r} + u(z)\,\mathrm{div}\,(r\overrightarrow{e_r}) + \text{æ}E_z(r,z)z \\ &= 2u(z) + \text{æ}E_z(r,z)z\end{aligned}$$

La divergence du champ électrique est nulle, donc

$$u(z) = -\frac{1}{2}\text{æ}E_z(r,z)z$$

On en déduit

$$E_r(r,z) = ru(z) = -\frac{r}{2}\text{æ}E_z(r,z)z$$