Semaine de colle n^o 15

Question de cours : Interface entre deux milieux

Réflexion et transmission d'une onde acoustique plane progressive sous incidence normale sur une interface plane infinie entre deux fluides : conditions aux limites, coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la surpression. Bilan énergétique.

Exercice : Influence de la raideur d'une corde sur ses modes propres

On envisage une petite déformation transversale $y(x,t)$ sur une corde vibrante de longueur L, de masse linéique μ avec une tension T. La corde n'étant pas parfaitement souple, la force exercée en un point d'abscisse x par la partie située au delà de x sur la partie en deçà de x est de la forme :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{T} - \gamma \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \overrightarrow{u_y}$$

1. Chercher par analyse dimensionnelle une expression de la constant positive sous la forme d'un monôme $\gamma = Y^p r^q$ en fonction du module d'Young Y et du rayon r de la corde.
2. Établir l'équation d'onde dont $y(x,t)$ est solution.
3. La corde est fixée à ses extrémités. On cherche des modes propres de la forme :

$$y_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

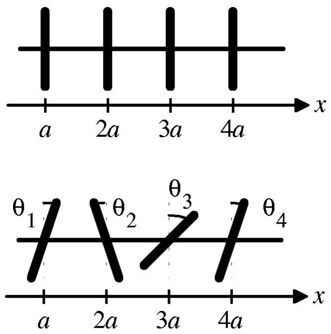
Déterminer les pulsations propres ω_n.

Question de cours : Conducteur ohmique

Établir l'expression de la conductivité électrique à l'aide du modèle de Drüde. Loi d'ohm locale. Influence de la fréquence. Résistance d'une portion de conducteur filiforme.

Exercice : Onde de torsion

Un fil est tendu avec une tension suffisante pour qu'on puisse le considérer comme horizontal, confondu avec l'axe (Ox). A chaque abscisse $x_n = na$ (où n est entier) on accroche par son centre une barre rigide homogène, de longueur 2ℓ, de masse m. Le moment d'inertie de chaque barre relativement à (Ox) est égal à $J = \dfrac{1}{12} m\ell^2$. Dans la situation de repos, ces barres sont toutes verticales. En mouvement, les barres tournent dans le plan vertical (yz) et la barre à l'abscisse na fait avec la verticale l'angle θ_n (sur le schéma ci-dessous, θ_2 seul est négatif). Le brin de fil situé entre na et $(n+1)a$ est un fil de constante de torsion C, qui exerce donc sur ses deux extrémités un couple de moment $\pm C(\theta_n - \theta_{n+1})$.



1. Établir l'équation du mouvement de la n-ième barre. La chaîne est supposée infinie.
2. On envisage une description continue de la même chaîne infinie, l'élément de longueur dx de fil portant un moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Ox égal à $J_{eq} = \lambda dx$ et ayant une constante de torsion $C_{eq} = \gamma / dx$.
   (a) À quel fil de torsion est équivalent la fixation bout à bout de deux fils de même longueur a et de même constante de torsion C ? En déduire la relation liant γ, C et a. Relier de même λ, J et a.

 Semaine de colle n^o 15

(b) b) On appelle $\theta(x,t)$ la torsion de l'élément de fil d'abscisse x à l'instant t. Montrer et interpréter l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

3. On note

$$E = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 \quad ; \quad \Pi = -\gamma\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right).$$

Quelle est l'unité de mesure de E ? Celle de Π ? Montrer une relation entre ces deux grandeurs exprimant la conservation de l'énergie mécanique lors de la propagation.

4. Déterminer la vitesse de transport de l'énergie.

Question de cours : Équation locale de conservation de la charge

Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Généralisation en géométrie quelconque. Cas du régime stationnaire.

Exercice : Onde dans un ressort

Un ressort à spires non jointives de longueur L et de masse linéïque μ a une raideur K. Le ressort est placé sur un axe horizontal. Le déplacement des spires se fait sans frottement.

On étudie une longueur élémentaire dx du ressort au repos qui, au passage d'une onde de déformation, voit ses extrémités se déplacer de $\xi(x,t)$ et $\xi(x+dx,t)$.

1. On considère deux ressorts associés en série de raideur k. L'ensemble est considéré comme un ressort unique de raideur K.
   (a) Déterminer la relation entre k et K.
   (b) En déduire que l'expression de la raideur k_{dx} d'une longueur dx du ressort est $k_{dx} = K\dfrac{L}{dx}$.
2. Exprimer l'allongement de cet élément de ressort en fonction de $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$.
3. On étudie l'élément de longueur dx de ressort situé entre les abscisses x et $x+dx$. Exprimer les forces de rappel s'exerçant aux extrémités de cet élément en fonction de $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(x,t)$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(x+dx,t)$, K et L.
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\xi(x,t)$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans le ressort.
5. On considère le ressort fixé en $x=0$ et relié à une masse libre de se déplacer en $x=L$. Montrer qu'il existe des solutions d'ondes stationnaires du type $\xi(x,t) = g(x).\sin\omega t$. Déterminer $g(x)$ puis une équation vérifiée par ω.
6. On fixe le ressort en $x=0$. En $x=L$, le ressort est lié à une masse M. Déterminer la relation entre k et ω pour les modes propres de vibration.

Données : $L = 1$ m ; $m = 150$ g ; $K = 3,7$ N.m^{-1}.