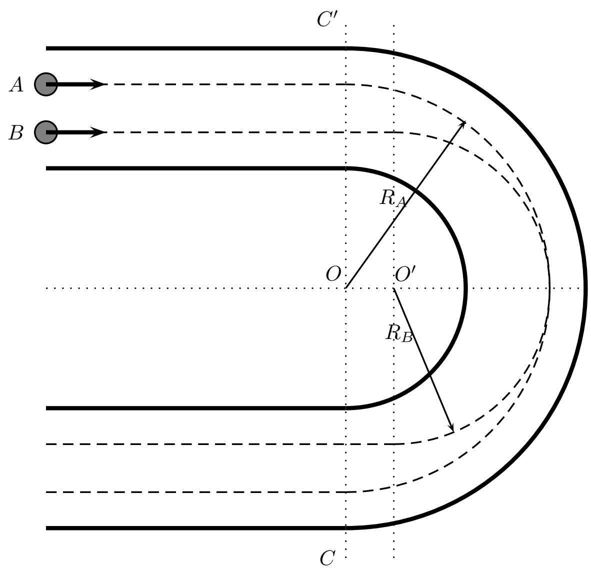
# A – Cinématique du point

## Exercice A – 1 Course de bateaux

1. Établir l'équation horaire du mouvement d'un point $M$ dont le vecteur accélération constant $\vec{a}$ est colinéaire au vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$.
2. Deux bateaux effectuent une course « départ lancé ». Ils passent au même instant la ligne de départ avec les vitesses respectives $\vec{v}_{10}$ et $\vec{v}_{20}$ et se déplacent parallèlement avec des accélérations $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ constantes.
Déterminer la longueur du parcours sachant qu'ils atteignent en même temps la ligne d'arrivée.

## Exercice A – 2 Virage large ou serré ?




Lors d'un grand prix, deux voitures ($A$ et $B$) arrivent en ligne droite, coupent l'axe $CC'$ au même instant et prennent le virage de deux manières différentes :

- la voiture $A$ suit une trajectoire circulaire de centre $O$ et de rayon $R_A = 90,0$ m
- la voiture $B$ négocie le même virage sur une trajectoire circulaire de centre $O'$ et de rayon $R_B = 75,0$ m.

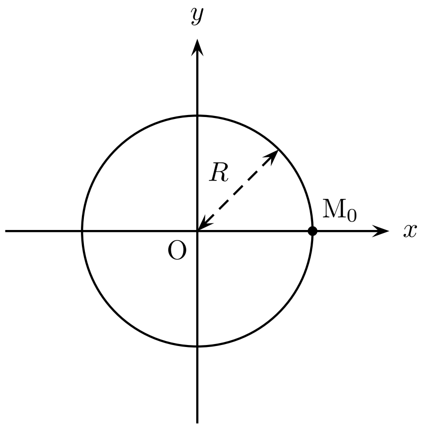
  Le but de ce problème est de déterminer laquelle des deux voitures sortira en premier du virage en coupant à nouveau l'axe $CC'$.

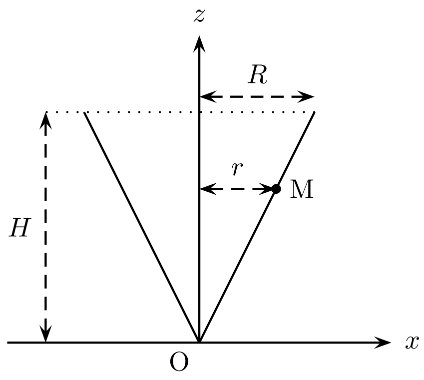
1. Déterminer littéralement puis numériquement les longueurs $L_A$ et $L_B$ des trajectoires des deux voitures entre les entrées et sorties du virage, c'est-à-dire au passage par l'axe $(CC')$ sur la vue en plan.
Comparer $L_A$ et $L_B$.
2. On suppose que les deux voitures roulent à des vitesses $v_A$ et $v_B$ constantes pendant tout le virage (et avant). Déterminer ces vitesses pour que, dans les virages, les accélérations des deux voitures restent inférieures à $0,8g$ avec $g = 9,81$ m.s$^{-2}$ la constante de pesanteur (au delà de cette limite, elles dérapent et finissent leur route dans les graviers).
Calculer la vitesse maximale de chaque voiture.
3. Conclure par rapport à la question posée initialement.

## Exercice A – 3 Bille dans un entonnoir

Une bille assimilée à un point matériel $M$ roule dans un entonnoir modélisé par un cône d'axe $Oz$, de hauteur $H$ et de base de rayon $R$ (figure suivante).

Initialement, elle est en haut de l'entonnoir en un point $M_0$. Le mouvement de la bille est supposé uniforme à la vitesse $V$.




Le point $M$ est repéré par ses coordonnées polaires $(r, \theta, z)$ avec $r$ la distance de $M$ à l'axe $Oz$, $\theta$ l'angle (initialement nul) entre $Ox$ et le projeté orthogonal de $M$ sur le plan $xOy$ et $z$ la cote du point $M$ sur l'axe $Oz$.

1. Faire un schéma faisant apparaître $M$, les coordonnées de $M$ et le repère cylindro-polaire.
2. Rappeler l'expression générale du vecteur position dans le repère cylindro-polaire.
3. En déduire l'expression générale du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ en repère cylindrique.
4. On suppose que la composante verticale de la vitesse $v_z$ est constante. On la note $v_z(t) = -V_0$ avec $V_0$ constante positive. En déduire l'équation horaire $z(t)$.
5. Exprimer l'appartenance de M au cône par une relation entre $r(t)$, $z(t)$, $R$ et $H$. En déduire l'équation horaire $r(t)$.
6. Établir l'expression de $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $V^2$, $V_0^2$, $R$, $H$ et $t$.
7. En déduire l'équation horaire $\theta(t)$ (vous pourrez poser $A = \sqrt{V^2 - V_0^2\left(\left(\dfrac{R}{H}\right)^2 + 1\right)}$).
8. Déterminer l'équation de $r(\theta)$ de la trajectoire.
9. Quelle est la durée totale $\tau$ de cette chute, ainsi que la distance $d$ qu'aura parcourue $M$ à son terme ? Application numérique : $R = 20,0$ cm, $H = 8,0$ cm, $V = 1,2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $V_0 = 2,5\ \mathrm{mm \cdot s^{-1}}$.

# B – Dynamique du point

## Exercice B – 1 Flocon de neige, goutte d'eau et bulle

1. Chute d'un flocon

   On s'intéresse à la chute dans l'air d'un flocon de neige, supposé sphérique, de rayon $R = 0,5$ mm et de masse volumique $\rho$. La viscosité de l'air est $\eta$, sa masse volumique $\rho_a$. On suppose ces grandeurs constantes. Du fait de la viscosité de l'air, le flocon est soumis à une force de frottement $\vec{f_S}$ proportionnelle à sa vitesse $\vec{v}$ : $\vec{f_S} = -6\pi\eta R\vec{v}$ (formule de Stokes).
   On peut considérer, qu'une fois formé dans le nuage, le flocon commence son mouvement de chute sans vitesse initiale.

   (a) Dresser le bilan des forces qui s'exercent sur le flocon.
   Exprimer la résultante des forces en fonction de $\eta$, $\rho$, $\rho_a$, $R$, $g$ et $v$.

   (b) Montrer que la vitesse du flocon obéit à l'équation différentielle suivante :

   $$\frac{dv}{dt} + \alpha v = \beta.$$

   Expliciter les constantes $\alpha$ et $\beta$.

(c) En déduire la vitesse limite, $v_\infty$, acquise par ce flocon lors de sa chute.
AN : $\rho = 100$ g/L, $\rho_a = 1,3$ g/L, $\eta = 2,0 \times 10^{-5}$ P$\ell$ et $g = 9,8$ m.s$^{-2}$. Calculer cette vitesse limite.

(d) Montrer que la puissance de la force de Stokes est : $P = -6\pi\eta R v^2$.

2. Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère

Extrait de X MP 2008

(a) Une goutte d'eau sphérique de rayon $a$, indéformable et de masse volumique uniforme $\rho$ tombe dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ suivant un axe vertical $Oz$ dirigé vers le bas (figure 1).

L'atmosphère exerce sur la goutte la force $\vec{F}$, dite de traînée, opposée à la vitesse $\vec{v}$ et qui s'exprime par la relation

$$\vec{F} = -6\pi\eta \frac{a\vec{v}}{1 + \dfrac{\ell}{a}}$$

où $\eta$ et $\ell$ sont des constantes positives.
Exprimer, à partir de l'équation du mouvement de la goutte, la vitesse limite de chute de cette dernière, que l'on notera $\vec{V}_{lim}$.

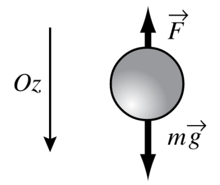


*Figure 1 - Forces sur une goutte en chute verticale.*

(b) On donne $g = 9,8$ m.s$^{-2}$, $\rho = 1,0 \times 10^3$ kg.m$^{-3}$, $\ell = 0,07$ $\mu$m et $\eta = 1,7 \times 10^{-5}$ Pa.s.
Calculer $V_{lim}$ pour $a = a_1 = 0,01$ mm puis pour $a = a_2 = 0,1$ mm.

(c) L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur 8 km. En utilisant les deux résultats numériques de la question (b), évaluer le temps de transit de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs $a_1$ et $a_2$.

(d) Quel serait le temps de transit dans l'atmosphère de bulles (et non plus de gouttes) de rayon $a_2 = 0,1$ mm et d'épaisseur $e = 0,1 \cdot a_2$ ?

3. Chute d'une goutte

Un autre modèle pose que la goutte à laquelle on s'intéresse traverse un nuage de gouttes immobiles, qui s'agrègent à la goutte en chute et qui accroissent sa masse d'autant (accrétion).
On ignore alors la force de traînée, mais on admet que le taux d'accroissement de la masse de la goutte est proportionnel à sa vitesse de chute, soit :

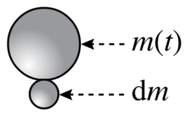


*Figure 2 - Accrétion d'une goutte.*

$$\frac{1}{m(t)} \frac{dm}{dt} = \lambda v(t)$$

où $\lambda$ est une constante positive ; on appliquera ici le principe fondamental de la dynamique pour un système de masse variable :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[m(t)\vec{v}(t)]$$

(a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. La résoudre et exprimer $v(t)$ pour une goutte tombant initialement du haut de l'atmosphère, où sa vitesse est nulle.

(b) Quel est le temps caractéristique, noté $\tau_v$, d'évolution de la vitesse ? Quelle est la vitesse limite de chute ?

(c) Avec $\lambda = 5 \times 10^{-4}$ m$^{-1}$, calculer $\tau_v$ et la vitesse limite de chute.

(d) Quelle remarque critique sur ce modèle ce résultat numérique vous suggère-t-il ? Pour quel rayon de goutte y a-t-il égalité de cette vitesse limite avec celle que donne l'expression obtenue à la question 2 ?

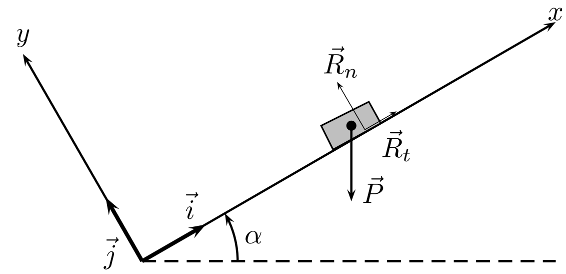
En supposant que le flocon acquiert instantanément sa vitesse limite, exprimer l'énergie $E_f$ perdue par frottement en fonction des données et de la durée de la chute $\tau$. Calculer $E_f$ si $\tau = 1000$ $s$.

## Exercice B – 2 Mesure d'un coefficient de frottement

Extrait du sujet des Petites Mines 2004

On se propose de mesurer le coefficient de frottement du verre sur le verre, noté $\mu$. Pour cela, on dispose d'une grande vitre plane et d'un petit morceau de verre parallélépipédique de masse $m$. On pose le petit morceau de verre sur la vitre initialement horizontale et on incline doucement la vitre.

On notera $\alpha$ l'angle que fait la vitre avec l'horizontale (cf figure).




1. En supposant que le petit morceau de verre soit immobile, exprimer les composantes normale et tangentielle de la réaction en fonction de la masse $m$ du petit morceau de verre, de l'accélération de la pesanteur $g$ et de l'angle $\alpha$.
2. En déduire une condition sur l'angle $\alpha$ et sur le coefficient de frottement $\mu$ pour que le petit morceau de verre ne glisse pas.
3. Expérimentalement, on remarque que pour $\alpha \geq 35^o$ le petit morceau de verre se met à glisser. En déduire la valeur de $\mu$.
4. Pour $\alpha = 45^o$, établir l'équation du mouvement (à $t = 0$, $\overrightarrow{OM}_0 = x_0\vec{i}$, $\vec{v}_0 = \vec{0}$).

## Exercice B – 3 Le pendule simple

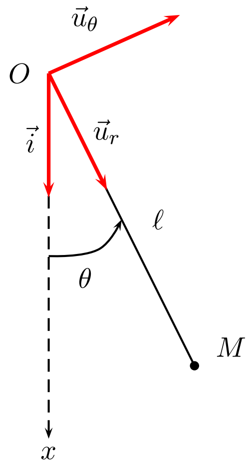
Extrait des Petites Mines 1996.

**A. Le pendule simple non amorti.**

On considère un point matériel $M$ de masse $m$ accroché à un point fixe $O$ par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur $\ell$ et de masse nulle.
L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{i}$ (avec $g = 9,81$ m.s$^{-2}$), $\vec{i}$ étant un vecteur unitaire de l'axe $(Ox)$.

On note, l'angle orienté : $\theta = ((Ox), \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \vec{u}_r)$ où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. On néglige les frottements.

On lâche la masse d'un angle $\theta_0$ **sans vitesse initiale**. On se place dans le cas des petites oscillations.




**Étude dans le cas de petites oscillations**

On admet que le mouvement est plan.
1. Établir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par $\theta$.
2. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0$ dont on donnera l'expression en fonction de $\ell$ et $g$.
3. En déduire $\theta(t)$.

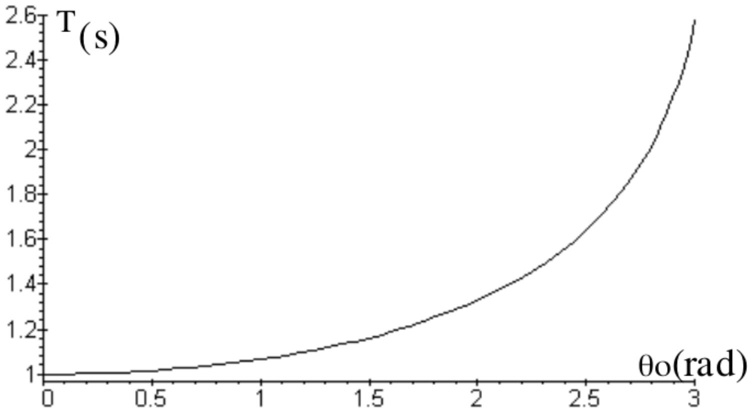
**Étude aux grands angles : $\sin(\theta) \neq \theta$.**

4. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de $x$ puis en fonction de $\theta$.

5. Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.
   En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$, $\theta$, $\theta_0$ et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.
6. Donner l'expression de la période $T(\theta_0)$ sous forme d'une intégrale en fonction $\theta$, $\theta_0$ et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

   **On ne demande pas de calculer cette intégrale.**

7. Une intégration numérique donne le courbe ci-dessous, commenter la courbe obtenue.



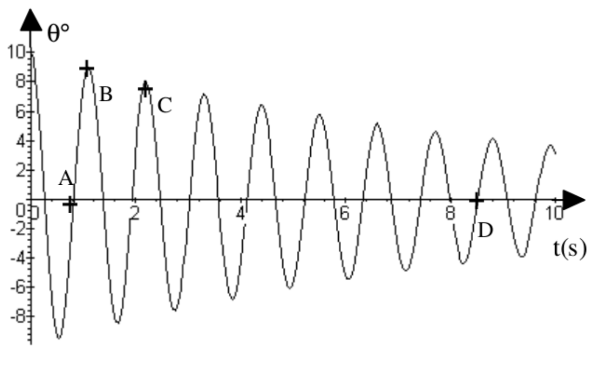

**B. L'oscillateur amorti.**

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de $\theta$ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par :

$$\vec{f} = -\alpha.\vec{v},$$

$\vec{v}$ désigne la vitesse du point $M$ et $\alpha$, une constante positive.

1. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta$.
2. En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :
   $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0.$$
   Donner l'expression de $\tau$ et son interprétation physique.
3. À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?
4. Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation $\omega$ et la pseudo-période $T$.
5. On note $\delta$ le décrément logarithmique. Exprimer $\delta$ en fonction de $T$ et $\tau$.
6. La figure ci-dessous représente les variations de $\theta$ avec le temps.




   On précise les coordonnées de 4 points particuliers :

| Points | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $t$ en s | 0,53 | 1,1 | 2,2 | 8,25 |
| $\theta$ en $^o$ | 0 | 8,95 | 8,02 | 0 |

La masse est $m = 470\ g$.
Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales :

(a) le décrément logarithmique $\delta$ ;

(b) la pseudo-période, $T$ ;

(c) le temps $\tau$ ;

(d) la constante, $\alpha$.

## Exercice B – 4 Modélisation d'une suspension de véhicule

Extrait de CCINP TSI 2013

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :
- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat...
Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

**Données :** champ de pesanteur : $g = 10$ m.s$^{-2}$.

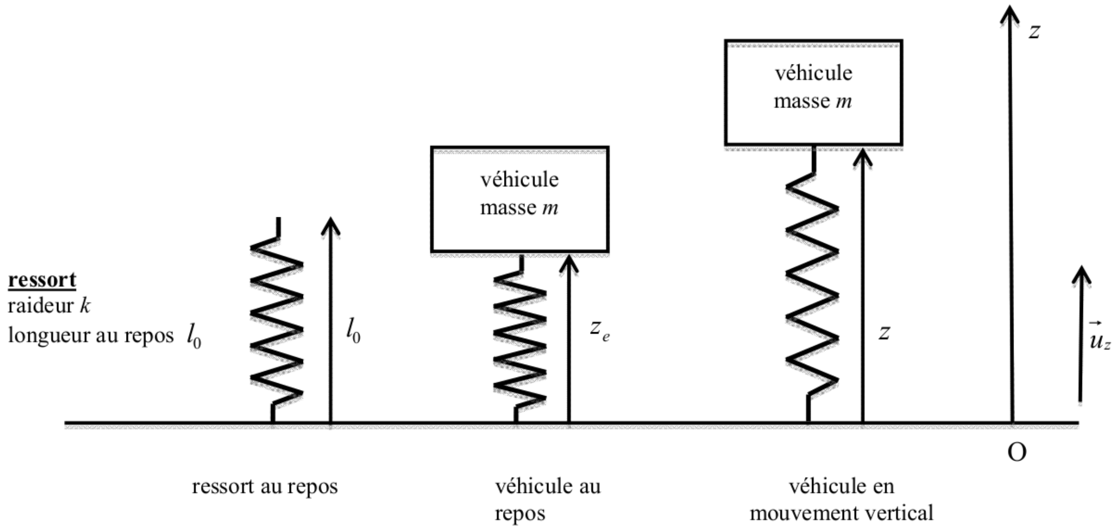
**Hypothèses :** tout au long du problème, on considérera que :
- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- la roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

**Première partie : suspension sans amortissement.**

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse $m = 1,0 \cdot 10^3$ kg.
La suspension du véhicule est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur $k = 1,0 \cdot 10^5$ N.m$^{-1}$ et de longueur au repos $\ell_0$.

Dans cette première partie, on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule.
La position du véhicule est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe $Oz$ étant vertical, orienté vers le haut et muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_z$ (figure 1).

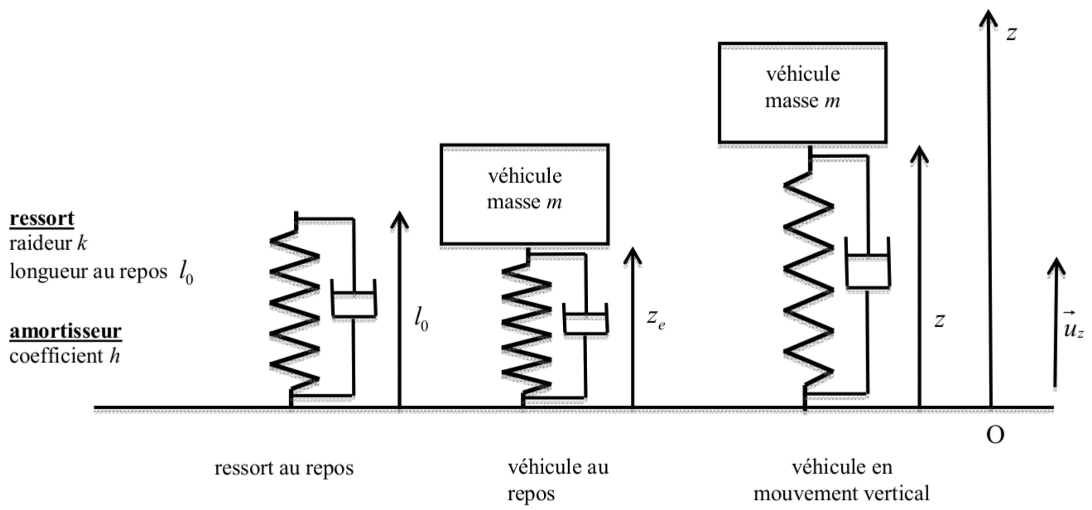
À l'équilibre, en absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnées $z_e$.




1. Faire un bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.
2. Déterminer l'expression de la cote $z_e$ du véhicule à l'équilibre en fonction de $m$, $g$, $k$ et $\ell_0$.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
4. Donner la solution générale de l'équation différentielle précédente. Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre $\omega_0$ et de la période propre $T_0$ en fonction de $k$ et $m$. Faire les applications numériques.
5. On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans un position repérée par la cote $z_0$ avec $z_0 < z_e$.
   À l'instant $t = 0$, choisi comme origine des temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la solution complète $z(t)$ en fonction de $t$, $z_e$, $z_0$ et $\omega_0$.
6. Tracer l'allure de $z(t)$ et faire apparaître sur le graphique les cotes minimale $z_{min}$, maximale $z_{max}$ et moyenne $z_{moy}$ ainsi que la période propre $T_0$.
   Donner les expressions littérales des cotes minimale $z_{min}$, maximale $z_{max}$ et moyenne $z_{moy}$.

**Deuxième partie : suspension avec amortissement**

On suppose dans cette partie que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse $m$, une force d'amortissement visqueux données par $\vec{F} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et $h$ un coefficient appelé coefficient de frottement fluide.




7. Quelle est l'unité de $h$ dans le système international ?
8. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée $z(t)$.
9. Écrire les conditions portant sur les paramètres $m$, $k$ et $h$ pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudopériodique, critique et apériodique.

10. Véhicule en charge et vieillissement de la suspension.
    (a) Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-elle lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.
    (b) Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudopériodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

    Le véhicule se déplace maintenant sur un sol non plat. La position verticale du point bas de la suspension la roue) est repérée par la variable $z_s(t)$.

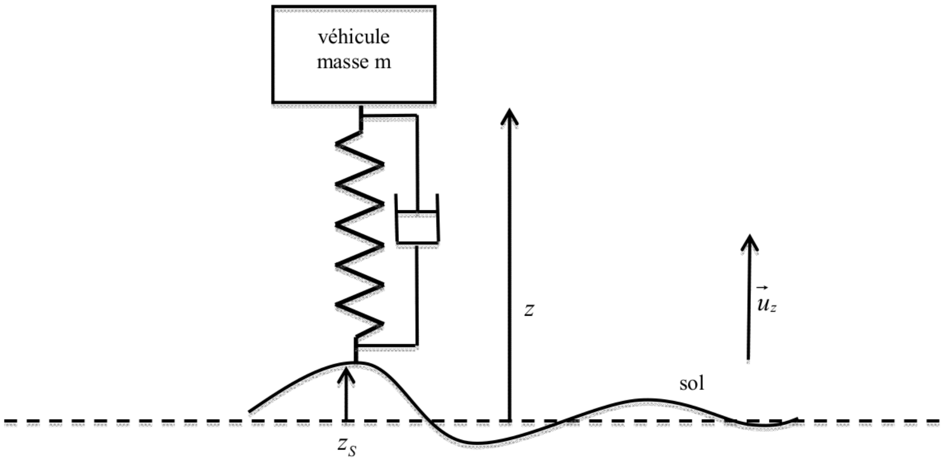



Figure 3 : véhicule sur un sol non plat de profil quelconque

11. Nous nous placerons pour cette question dans la cas particulier où le véhicule se déplace sur une route telle que :
    — pour $t < t_1$ ; $z_s(t) = z_1$ où $z_1$ est une constante positive et $t_1 > 0$ ;
    — pour $t > t_1$ ; $z_s(t) = 0$.

    Pour illustrer la situation, on pourra imaginer qu'à l'instant $t_1$ la véhicule descend d'un trottoir de hauteur $z_1$ et rejoint une route plane et horizontale de cote nulle.

    On considère que pour $t < t_1$, la cote $z(t)$ du véhicule est constante, c'est-à-dire que le véhicule se déplace en régime permanent.

    Donner l'allure de $z(t)$ pour $t$ variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime pseudopériodique.

**Troisième partie : régime forcé**

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante $v_1$. Il se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal.
On a donc $z_s(t) = z_{s0}\cos(\omega t)$.

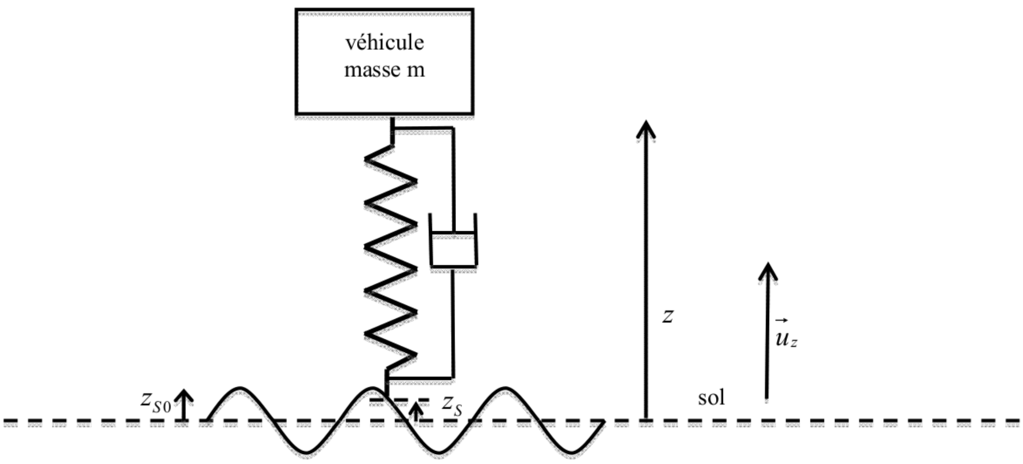



Figure 4 : régime forcé

La suspension comporte un dispositif d'amortissement visqueux ; son action sur le véhicule est modélisée par la force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et $h$ le coefficient de frottement fluide. On a donc $\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z$.

12. Déterminer l'équation différentielle reliant les fonctions $z(t)$ et $z_s(t)$ et leurs dérivées temporelles ainsi que les paramètres $h$, $m$, $k$ et $z_e$.

    Voulant étudier les oscillations de la masse $m$ autour de sa position d'équilibre $z_e$, on posera $z' = z - z_e$.

13. Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme :

$$m\ddot{z'} + h\dot{z'} + kz' = Y(t).$$

    Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de $z_s$, $\dot{z}_s$, $k$ et $h$.

    Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes.

14. Pour simplifier les notations, on posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } 2\lambda = \frac{h}{m}.$$

    Déterminer l'expression de la réponse complexe $\dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}$ de la suspension en fonction de $\omega$, $\omega_0$ et $\lambda$.

    Montrer que le module de la réponse complexe est donné par la relation :

$$H = \left|\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}.$$

15. Étude de la réponse complexe.
    (a) Déterminer la valeur vers laquelle tend $H$ lorsque la pulsation tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse $m$ par rapport au sol.
    (b) Déterminer la valeur vers laquelle tend $H$ lorsque la pulsation tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse $m$ par rapport au sol.
    (c) On considère pour simplifier :
    — que la valeur maximale de $H$ est atteinte pour une pulsation $\omega_r$ non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimale ;
    — que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 2\lambda^2$.

    Déterminer l'expression de $\omega_r$ en fonction de $\omega_0$ et $\lambda$. À quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à $\omega_r$ ?

    Remarque : en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de $H$ aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de $H$ dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.

16. Donner l'allure de la courbe représentant $H = \left|\dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}\right|$ en fonction de $\omega$. On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

## C – Énergie

On considère un véhicule, assimilé à un point matériel de masse $m$, en mouvement rectiligne horizontal. Sa position est repérée par son abscisse $x$ et on ne considérera que les composantes des forces colinéaires au vecteur directeur $\vec{u}_x$ de l'axe $Ox$. Dans tout le problème, on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

**A. Marche avant à puissance constante**
L'automobile n'est soumise qu'à l'action de son moteur qui développe une puissance constante $P$. Elle part du repos en $x = 0$. Les frottements sont négligés.

1. Déterminer, en fonction du temps, les expressions de la vitesse $v(t)$, de l'accélération $\gamma(t)$ et de l'abscisse $x(t)$.

2. Déterminer l'expression de $x$ en fonction de la vitesse $v$.
3. Au bout de quelle distance le véhicule aura-t-il atteint la vitesse de 90 km/h ?
   On donne : $m = 1200$ kg et $P = 75$ kW.

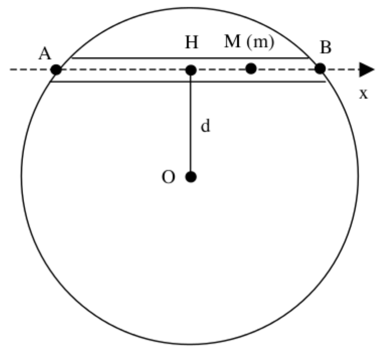
**B. Prise en compte de forces de frottement**
La voiture est maintenant soumise, en plus de l'action du moteur, à une force de résistance de l'air, de norme $kmv^2$, où $k$ est une constante positive.

1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, pendant une durée infinitésimale $dt$, établir l'équation différentielle :
$$dx = \frac{mv^2dv}{P - kmv^3}.$$
2. En intégrant cette équation différentielle, exprimer $x$ en fonction de $v$, sachant que $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$.
3. Montrer qu'il existe une vitesse limite $V_\infty$.
4. Donner $x$ en fonction de $v$ et de $V_\infty$.
5. On donne $V_\infty = 180$ km/h. Calculer la valeur de $k$.
6. Au bout de quelle distance $X$, le véhicule aura-t-il atteint la vitesse de 90 km/h ?

## Exercice C – 1 Tunnel terrestre

On admet que pour tout point $M$ de masse $m$, situé à l'intérieur de la Terre, à la distance $r$ du centre $O$ de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :
$$\vec{f} = -mg_0\frac{r}{R}\vec{e}_r$$
avec $r = OM$ et $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.

Données numériques : $R = 6,4.10^6$ m et $g_0 = 10$ m.s$^{-2}$.




1. Montrer que cette force dérive de l'énergie potentielle
$$E_p(r) = \frac{mg_0r^2}{2R}$$
   l'on prend $E_p(r = 0) = 0$ au centre de la Terre.
2. Quelle est l'expression de $E_p(A)$ ?
3. On considère un tunnel rectiligne reliant deux villes $A$ et $B$, d'axe $(Hx)$ ne passant pas par le centre de la Terre $O$. On note $d$ la distance $OH$ du tunnel au centre de la Terre.

   Un véhicule, assimilé à un point matériel $M$ de masse $m$ glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part de la ville $A$ de la surface terrestre, sans vitesse initiale.

   Le vecteur position peut s'exprimer de deux façons :
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = x\vec{e}_x + d\vec{e}_y$$
   Quelle est l'expression de $E_p(x)$ ?
4. Quelle est sa vitesse maximale $v_m$ au cours de son mouvement ? Calculer $v_m$ sachant que $d = 5.10^6$ m.
5. Exprimer $\overline{HM} = x$ en fonction du temps $t$ par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de $v_m$.
6. Représenter et commenter le graphe de $E_p(x)$, $E_p$ étant l'énergie potentielle de gravitation du point matériel $M$.

   Décrire le mouvement du point $M$ à partir de sa position initiale (en $A$).
7. On se propose de relier deux villes $A$ et $B$ distantes de 400 km ($AB = 400$ km).

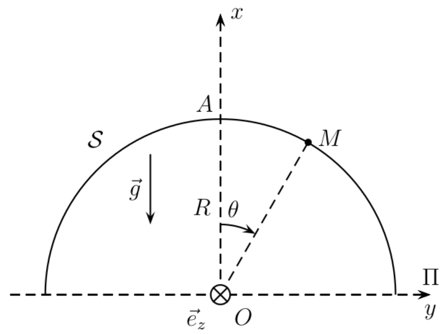
   Calculer la profondeur maximale $p$ du tunnel à construire.

   Calculer la vitesse maximale du véhicule en kilomètres par heure.

# D – Loi du moment cinétique

## Exercice D – 1 Palet sur demi-sphère

Un petit palet de chocolat, assimilable à un point matériel $M$ de masse $m$ doit décorer le sommet d'un dôme glacé. Il est posé sans vitesse initiale au sommet $A$ de son dôme assimilable à une demi-sphère $\mathscr{S}$ de rayon $R = 15$ cm et de centre $O$ posée sur un plan $\Pi$.
On considère que le glissement s'effectue sans frottement. On suppose le référentiel terrestre galiléen et $g = 10$ m.s$^{-2}$.

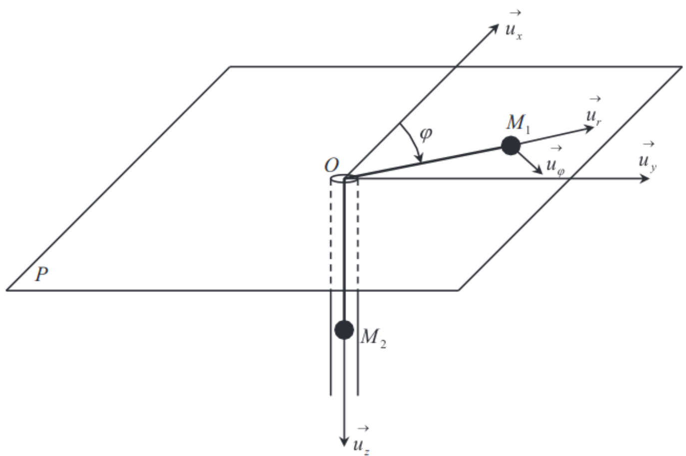



Suite à un déséquilibre infinitésimal, $M$ se met en mouvement sous l'effet de son poids, tout en restant dans le plan vertical $Oxy$.
On admet que, dans la phase (1) de son mouvement, $M$ reste en contact avec $\mathscr{S}$, sa position est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

1. Faire un bilan des forces et les représenter sur un schéma.
2. Établir l'expression du moment cinétique en $O$ du point matériel $M$ à l'instant initial.
3. Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à $O$ en fonction des coordonnées polaires.
4. Exprimer les moments des forces en $O$.
5. Déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.
6. En utilisant un théorème énergétique, déterminer la vitesse de $M$ en fonction de $\theta$, $g$ et $R$.
7. En déduire une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de $\theta$.
8. Déterminer la réaction $R_N$ du dôme sur le palet en fonction de $\theta$.
9. En déduire l'angle $\theta_m$ à partir duquel le palet quitte le dôme.

## Exercice D – 2 Point matériel sur un

D'après concours d'entrée ingénieur 2013




Dans le référentiel galiléen lié à la table, auquel on associe le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on considère deux points matériels $M_1$ et $M_2$ de même masse $m$, reliées par un fil ($M_1OM_2$) de longueur $L$, inextensible et de masse négligeable.

Le point matériel $M_1$ glisse sans frottement sur le plan **horizontal** $\mathscr{P}$ tandis que le point matériel $M_2$ coulisse sans frottement dans un tube vertical. La résultante de l'action du tube sur $M_2$ est égale au vecteur nul.

On note $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ le repère cylindrique et $\vec{g} = g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

La position du point $M_1$ est définie par $\overrightarrow{OM}_1 = r\vec{u}_r$ et la position du point $M_2$ est définie par $\overrightarrow{OM}_2 = z\vec{u}_z$.

Les condition initiales sont $r = r_0$ et $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$.

1. Établir un bilan des forces s'exerçant sur $M_1$ puis sur $M_2$.
2. Projeter la deuxième loi de Newton appliquée à chaque point matériel $M_1$ puis $M_2$ dans la base cylindrique.
3. Déterminer le moment cinétique par rapport à $O$ de chaque point matériel.
4. En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer $\dot{\varphi}$ en fonction de $r$, $\omega_0$ et $r_0$.

5. Le fil étant de masse négligeable, on dit qu'il transfert intégralement les tensions. Cela signifie que la norme de l'action du fil sur $M_1$ est égale à la norme de l'action du fil sur $M_2$. À partir des résultats précédents, montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit $r$ s'écrit sous la forme :

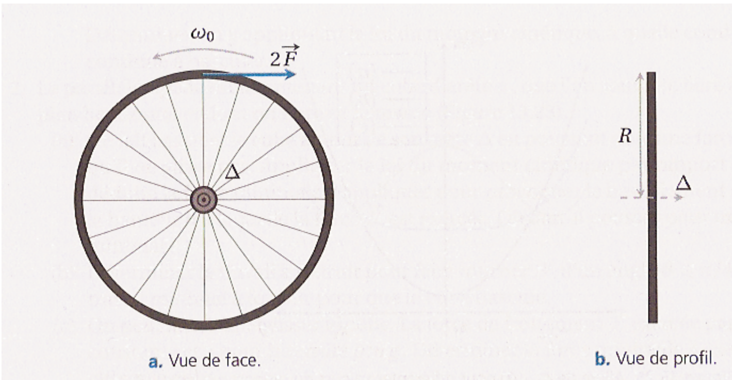
$$2\ddot{r} - \frac{K}{r^3} = -g.$$

On exprimera $K$ en fonction de $\omega_0$ et $r_0$.
6. On considère maintenant le cas où $M_1$ décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon $r_0$. Déterminer alors $\omega_0$ en fonction de $r_0$ et $g$ pour que cela soit possible.

# E – Solide

## Roue de vélo

On considère une roue de bicyclette à rayons de rayon $R$, de centre $O$ et de masse $m$ dont on étudie l'arrêt de la rotation par des freins à étrier. Chacun des deux freins exerce sur la jante une force d'intensité $F$ que l'on considérera constante tant que la roue tourne.



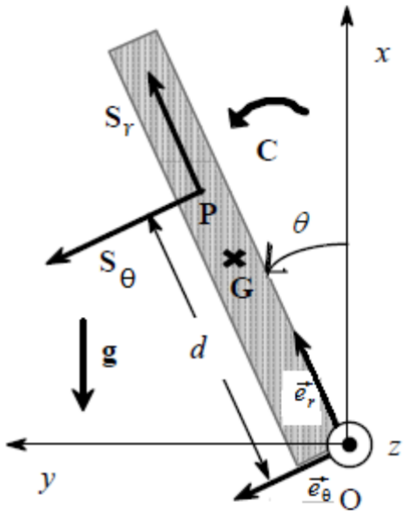

Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu fixe, noté $\Delta = Oz$. On néglige les frottements sur l'axe.

1. Calculer le moment d'inertie de la roue $J_\Delta = mR^2$ par rapport à l'axe $\Delta$ (cf données à la fin du problème).
2. Déterminer le moment des forces exercées par les freins par rapport à l'axe $\Delta$.
3. Déterminer l'équation différentielle d'évolution de l'angle $\theta$ autour de l'axe $\Delta$.
4. En déduire les expressions de $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ si, à $t = 0$, on a $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \omega_0$.
5. Calculer l'intensité $F$ de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour pour les paramètres suivants : $R = 33$ cm, $m = 1,6$ kg et $\omega_0 = 15$ rad.s$^{-1}$.
6. Avant le freinage, quelle était la vitesse d'un des points de la circonférence de la roue ?

## Exercice E – 1 Chute d'un cheminée

D'après Mines-Ponts Phys 1 option MP 2005.

Une cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse $M$, de longueur $D$ et de rayon **très petit** devant $D$. Pour une raison quelconque, l'équilibre de la cheminée est détruit ; cette dernière amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical $(O, x, y)$. On appelle $\theta$ l'angle de la cheminée avec la verticale.




On étudie le mouvement de la cheminée dans le repère $R_G$ en projection sur la base mobile de coordonnées polaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$. $\vec{e}_r$ est porté par l'axe de la cheminée, $\vec{e}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le sens de rotation de l'angle $\theta$ et $G$ est le centre de masse de la cheminée.

Les moments d'inertie en $G$ autour de l'axe $Gz$ et en $O$ autour de l'axe $Oz$ sont respectivement : $J_G = \frac{1}{12}MD^2$ et $J_O = \frac{1}{3}MD^2$.

La liaison pivot en O est parfaite.

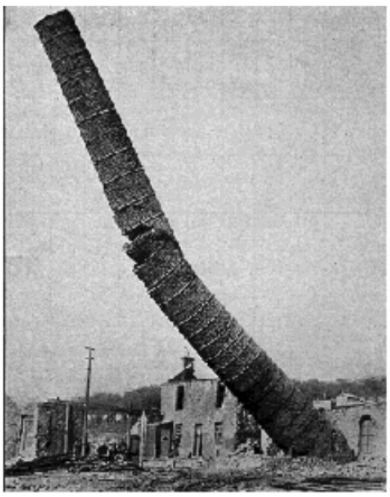
1. Déterminer, par application du théorème du moment cinétique en $O$, l'équation d'évolution de l'angle $\theta$.
2. Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.
3. Exprimer, en fonction de l'angle $\theta$, les composantes $R_r$ et $R_\theta$ de la réaction du sol en $O$ en projection sur $\vec{e}_r$ et sur $\vec{e}_\theta$.

En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute. Une longueur $OP = d$ de cheminée subit l'action du sol en $O$, l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en $P$. Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en $P$ n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la longueur $d$ est modélisée par une force $\vec{S}$ de composantes $S_r$ et $S_\theta$ et un couple $\mathscr{C}$ porté par l'axe horizontal $Oz$.

4. (a) En appliquant le principe de la résultante cinétique à la longueur $d$ de cheminée, exprimer $S_\theta$ en fonction de $M$, $g$, $\theta$, $d$ et $D$. La grandeur $S_\theta$ est appelée effort de cisaillement.
   (b) Tracer qualitativement le graphe donnant $S_\theta$ en fonction du rapport $\frac{d}{D}$, ($\theta$ est donné).
5. Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement $S_\theta$ est le plus important : quel est ce point ?
6. Montrer que le théorème du moment cinétique en $O$, appliqué à la longueur $d$ de cheminée conduit à l'expression suivante du moment (noté C) du couple $\mathscr{C}$ :

$$C = -\frac{1}{4}Mgd\left(\frac{d}{D} - 1\right)^2 \sin(\theta)$$

7. Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ? Commenter à ce sujet les deux photographies ci-dessous.

# F – Forces centrales conservatives

## Exercice F – 1 Étude de la comète 67P Churyomov – Gerasimenko

Extrait du sujet Mines-Pont 2017 option PSI

La comète étudiée s'appelle Churyomov – Gerasimenko, du nom des scientifiques ukrainiens M. Churyumov, l'utilisateur du télescope, et Mme Gerasimenko, la comparatrice d'images, qui l'ont codécouverte en 1969. Cette comète mesure entre 3 et 5 km de diamètre et tourne sur elle-même en une douzaine d'heures. Voilà à peu près tout ce que l'on savait sur la comète objet de Rosetta et Philae. Les estimations sur sa masse, varient, quant à elles, d'un facteur 10 et sa forme exacte restera un mystère jusqu'en juillet 2014 date de la première photo envoyée par Rosetta. Le noyau de la comète n'a pu être observé que depuis la Terre (le Very Large Telescope au Chili en lumière visible ou proche infrarouge) ou les satellites tournant autour de la Terre (Hubble en lumière visible, Spitzer en moyen infrarouge). De ces observations ont été tirées des courbes de lumière qui, elles-mêmes, ont permis de déterminer quelques unes de ses caractéristiques.

1. En appliquant le principe fondamental de la mécanique à une comète de masse $m$ en orbite circulaire de rayon $R$ autour du Soleil, retrouver la 3$^e$ loi de Kepler.

   Dans le cas d'une orbite elliptique, on peut démontrer que cette relation se généralise en remplaçant le rayon $R$ par le demi grand axe $a$ de l'ellipse (voir figure 1). En déduire la relation entre le demi-grand axe $a$ de l'ellipse parcourue par la comète, la période $T$ de la comète, la masse du Soleil $M_\odot$ et la constante de gravitation $\mathscr{G}$. Déterminer la valeur numérique de la période $T_c$ de la comète Churry. On donne $2\pi a_c = 33{\cdot}10^{11}$ SI et on prendra 1 an $\simeq \dfrac{1}{3}\cdot 10^8$ secondes.

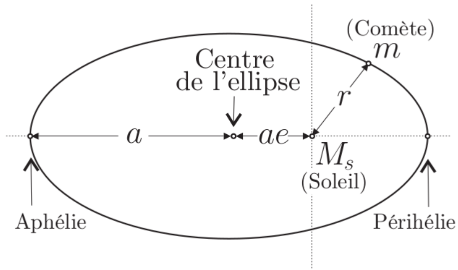



FIGURE 1 – Orbite elliptique d'excentricité $e$ et de demi-grand axe $a$.

2. On ne suppose plus la trajectoire circulaire, et on note $\vec{r}$ le vecteur position de la comète dans le référentiel héliocentrique et $r = \|\vec{r}\|$. Donner l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_S$ de la comète par rapport au Soleil. Montrer que la trajectoire de la comète est contenue dans un plan que l'on précisera.
   Déterminer l'expression de $\mathscr{C} = \dfrac{\|\vec{\sigma}_S\|}{m}$ en fonction des coordonnées polaires $(r,\theta)$ de la comète dans ce plan.
3. Établir la relation $\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{eff}(r)$ où $E_m$ est l'énergie mécanique supposée négative de la comète et $E_{eff}(r)$ son énergie potentielle effective que l'on exprimera en fonction de $\mathscr{C}$, $\mathscr{G}$, $m$, $M_\odot$ et $r$. Tracer la représentation graphique de $E_{eff}(r)$, et positionner sur ce graphique $E_m$, l'aphélie $r_{max}$ et le périhélie $r_{min}$ (voir figure 1).
4. Montrer qu'il existe une trajectoire circulaire correspondant à $r = r_{min} = r_{max} = r_0$ et $E_m = E_0$. Déterminer l'expression de $r_0$ en fonction de $\mathscr{C}$, $\mathscr{G}$ et $M_\odot$ puis en déduire celle de $E_0$ en fonction de $\mathscr{C}$, $\mathscr{G}$, $M_\odot$ et $m$. On note respectivement $E_c(r)$ et $E_p(r)$ les énergies cinétique et potentielle de la comète à la distance $r$ du Soleil, déterminer la relation entre $E_c(r_0)$ et $E_p(r_0)$.
5. Établir l'équation du second degré en $r$ dont $r_{min}$ et $r_{max}$ sont solutions, qui permet de déduire l'expression de $E_m$ en fonction de $\mathscr{G}$, $m$, $M_\odot$ et $a$. On donnera cette expression. Après avoir montré que son discriminant est bien positif, résoudre l'équation et déterminer la relation liant $e$ à $E_m$, $\mathscr{C}$, $a$ et $m$.
6. Quelle est la propriété de la vitesse aréolaire de la comète, rapport de la surface balayée par le rayon vecteur de la comète sur le temps mis par la parcourir ? Quel est l'astronome qui a identifié cette propriété qui porte son nom ? Sachant que l'aire d'une ellipse d'excentricité $e$ et de demi-grand axe $a$ est $S = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$, déterminer la relation entre la période de la comète et le demi-grand axe de l'ellipse. Commenter le résultat obtenu.

Données numériques

- Constante de la gravitation : $\mathscr{G} = 6,7\times10^{-11}$ m$^3$·kg$^{-1}$·s$^{-2}$.
- Vitesse de la lumière : $c = 3\times10^8$ m·s$^{-1}$.
- Masse du Soleil : $M_\odot = 2\times10^{30}$ kg.
- Unité astronomique : 1 ua $= 1,5\times10^{11}$ m.

Caractéristiques de la comète Churry

- $r_{max}$ : aphélie, distance au plus loin du Soleil : 5,70 ua
- $r_{min}$ : périhélie, distance au plus près du Soleil : 1,30 ua
- Taille caractéristique : 2000 m (albédo de 4%)
- Période de rotation autour de son axe principal : 12,6 h

## Exercice F – 2 Satellite solaire

## Satellites solaires

Le Soleil est décrit comme un astre à symétrie sphérique dont le centre $O$ peut être considéré comme l'origine d'un référentiel galiléen (référentiel de Copernic). On étudie dans ce référentiel le mouvement d'un point matériel $M$ de masse $m$. Celui-ci n'est soumis qu'à la force de gravitation due au Soleil : on néglige l'attraction des planètes. La masse du Soleil est notée $M_S$ et la constante de gravitation $\mathscr{G}$ : ces grandeurs peuvent apparaître dans les calculs mais leurs valeurs numériques n'ont pas besoin d'être connues.

1. La position du point matériel $M$ est repérée dans le référentiel d'étude par $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ Son vecteur vitesse à l'instant $t$ est noté $\vec{v}$.

   (a) Donner l'expression de la force de gravitation à laquelle $M$ est soumis.
   (b) Montrer que le moment cinétique en $O$ de $M$ est constant lors du mouvement.
   (c) Montrer que sa trajectoire est plane.
   (d) Dans le plan de la trajectoire, on repère le point $M$ par ses coordonnées polaires $r$ et $\theta$ ($\theta$ est l'angle polaire compté à partir d'un axe origine quelconque). Montrer qu'on peut écrire $r^2\frac{d\theta}{dt} = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est une constante. Si, à un instant donné, $M$ est en un point $P$ tel que sa vitesse $\vec{v}_P$ soit perpendiculaire à $\overrightarrow{OP}$ ($OP = r_P$), déterminer la constante $\mathscr{C}$ en fonction de $r_P$ et $v_P$.
   (e) Montrer que l'énergie mécanique de $M$ reste constante au cours du mouvement.

2. Une trajectoire possible de $M$ est un cercle de centre $O$ et de rayon $R$.

   (a) Montrer que si le mouvement est circulaire, il est circulaire uniforme.
   (b) Déterminer la vitesse de $M$ sur sa trajectoire et la durée $T$ de révolution appelée période.
   (c) Calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique de $M$ en fonction de $\mathscr{G}$, $M_S$, $m$ et $R$.
   (d) La trajectoire de la Terre autour du Soleil est très voisine d'un cercle de rayon $R_0$ et de période $T_0$. Donner, avec justification, une valeur convenable (à moins de 1% près) de la période $T_0$ en seconde. La vitesse orbitale de la Terre est $v_0 = 30\ 000\ m.s^{-1}$, calculer $R_0$. Exprimer le produit $\mathscr{G}M_S$ en fonction de $R_0$ et $v_0$.

3. On peut montrer que la trajectoire la plus générale de $M$ est une conique. Parmi ces trajectoires, on s'intéresse aux trajectoires elliptiques d'équation polaire (le pôle étant au foyer $O$ et l'axe polaire origine étant le grand axe $AP$, orienté de $A$ vers $P$) :
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$
   où $p$ et $e$ sont des constantes ($0 \leq e \leq 1$). Le point le plus éloigné de $O$ est l'aphélie $A$ et le point le plus rapproché de $O$ est le périhélie $P$.

   (a) Faire le schéma de l'ellipse et placer les points $O$, $A$, $P$ et $M$. Faire figurer l'angle $\theta$.
   (b) Calculer la longueur $a$ du demi-grand axe de cette ellipse en fonction de $p$ et $e$.
   (c) Quelle est la trajectoire pour $e = 0$ ?

(d) On admettra pour la suite du problème que les expressions obtenues au $2(b)$ et $2(c)$ pour la période et l'énergie mécanique des satellites restent valables à condition de remplacer le rayon $R$ par la longueur du demi-grand axe $a$. En tenant compte de $1(e)$, montrer que la vitesse $v$ en un point quelconque de la trajectoire est donnée par :

$$v^2 = \mathscr{G} M_S \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

4. L'orbite de Mars est décrite comme circulaire, coplanaire à l'orbite terrestre, de rayon $R_1 = n \cdot R_0$ ( $n = 1,524$). On veut transférer un engin spatial de l'orbite terrestre à l'orbite matienne ; on néglige pendant ce transfert l'attraction des planètes pour ne retenir que celle du Soleil.
L'une des trajectoires possibles est une ellipse, dont le Soleil est un foyer, tangente à l'orbite terrestre en son périhélie $P$ et à l'orbite martienne en son aphélie $A$, et coplanaire à l'orbite terrestre.

(a) Faire un schéma expliquant ce transfert.
(b) Calculer la durée $T_1$ de l'année martienne et la vitesse orbitale $v_1$ de Mars.
(c) Quelle doit être la vitesse $v_P$ de l'engin spatial au point $P$ sur l'ellipse de transfert ? L'exprimer en fonction de $v_0$ et $n$ puis la calculer numériquement.
(d) Quelle doit être sa vitesse $v_A$ en $A$ ? Calculer la différence $v_P - v_A$.
(e) Déterminer la durée du transfert en années terrestres.