

A – Cinématique du point

Exercice 1 Course de bateaux

1. Point matériel M $\vec{a} = a_0 \vec{i}$ et $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$

Par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}_0 t \quad \vec{v}(t) = (a_0 t + v_0) \vec{i}$$

Par définition $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}$

$$\vec{OM}(t) = \left(a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t \right) \vec{i} + \vec{OM}_0$$

On a 1 mouvement rectiligne - position initiale

2. bateau 1 B_1 $\vec{OB}_1(t) = \left(a_1 \frac{t^2}{2} + v_{01} t \right) \vec{i} + \vec{OB}_{01}$

bateau 2 B_2 $\vec{OB}_2(t) = \left(a_2 \frac{t^2}{2} + v_{02} t \right) \vec{i} + \vec{OB}_{02}$

On a $\vec{OB}_{01} = \vec{OB}_{02}$

Soit L la longueur du parcours. On cherche à avoir :

$$a_1 \frac{t_f^2}{2} + v_{01} t_f = a_2 \frac{t_f^2}{2} + v_{02} t_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (a_1 - a_2) t_f^2 + (v_{01} - v_{02}) t_f = 0$$

$$\Rightarrow t_f \cdot \left[\frac{1}{2} (a_1 - a_2) t_f + (v_{01} - v_{02}) \right] = 0$$

$$t_f = \frac{2(v_{02} - v_{01})}{a_1 - a_2}$$

$$L = \frac{a_1}{(a_1 - a_2)^2} (v_{02} - v_{01})^2 + \frac{2v_{01}(v_{02} - v_{01})}{a_1 - a_2}$$

$$L = \frac{2(v_{02} - v_{01})(a_1 v_{02} - a_2 v_{01})}{(a_1 - a_2)^2}$$

Course de bateaux - Commentaires

1.

Vecteur accélération constant $\vec{a}$

$$\Rightarrow \|\vec{a}\| = a_0 \text{ est constante}$$

[direction et le sens de $\vec{a}$ ne changent pas]

On a donc 1 direction privilégiée = 1 direction des repères cartésien choisi ($0 \vec{i} \vec{j} \vec{k}$)

$$\vec{a} = a_0 \vec{i}$$

Par $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ colinéaire à $\vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$$

⚠ Évitez $\vec{v}_0 = k \vec{a}$ car $[k] \neq 1$ ($[k] = T$)

Il faut partir des définitions,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{or} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \quad \text{VECTEURS}$$

faire apparaître les constantes d'intégration et les déterminer.

$$x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

$$y(t) = y_0$$

$$z(t) = z_0$$

Conclusion : Mouvement rectiligne
uniformément accéléré

2] Evitez $\vec{OB}_{01} = \vec{OB}_{02}$
Par contre $\omega_{01} = \omega_{02}$!

Définissez t_f

$$\rightarrow \frac{1}{2}(a_1 - a_2)t_f^2 + (v_{01} - v_{02})t_f = 0$$

Une solution triviale $t_f = 0$ qui n'a pas
intérêt pas.

PAS BESOIN DE DISCRIMINANT !!!

t_f n'est pas la longueur, il faut la réinjecter

Exercice 2 Virage large ou serré ?

$$1] \quad L_A = \pi R_A \quad L_A = 283 \text{ m.}$$

$$L_B = \pi R_B + 200'$$

$$= \pi R_B + 2(R_A - R_B) \quad L_B = 266 \text{ m}$$

$$L_B < L_A$$

2] Dans le virage la trajectoire est circulaire
 $\Rightarrow$ repère polaire

$$\vec{OH} = R \vec{u}_r \quad \vec{v} = \frac{d\vec{OH}}{dt}$$

$$= R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = v \vec{u}_\theta \quad \text{avec } v = \omega R$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$

$$\text{On veut } \frac{v^2}{R} \leq 9,8 \text{ g.}$$

$$v_A \leq \sqrt{9,8 \text{ g } R_A} \quad \text{et} \quad v_B \leq \sqrt{9,8 \text{ g } R_B}$$

$$v_{A \text{ max}} = 26,6 \text{ ms}^{-1}$$

$$= 95,8 \text{ km h}^{-1}$$

$$v_{B \text{ max}} = 24,3 \text{ ms}^{-1}$$

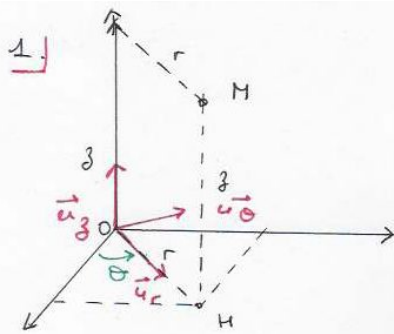
$$= 87,3 \text{ km h}^{-1}$$

3] Mouvement uniforme $T_i = \frac{L_i}{v_i}$
avec T_i = temps de parcours du virage.

$$T_A = 10,6 \text{ s} \quad T_B = 10,9 \text{ s}$$

La voiture A sort en premier du virage.

Exercice 3 Bille dans un entonnoir



2.] $\vec{OM} = r \vec{e}_1 + z \vec{e}_3$

3.] $\vec{v}$ vecteur vitesse

Par définition

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_1 + r \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_3$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_1 + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dz}{dt} \vec{e}_3$$

4.] $v_3(t) = -V_0$ or $v_3(t) = \frac{dz}{dt}(t)$

soit $\frac{dz}{dt} = -V_0$

On intègre par rapport au temps : $z(t) = -V_0 t + C_1$

avec $z(0) = H = C_1$

$$z(t) = H - V_0 t$$

5.] $M \in \text{cône} : r(t) = \alpha z(t)$

avec $R = \alpha H$ soit $r(t) = \frac{R}{H} z(t)$

$$r(t) = R - V_0 \frac{R}{H} t$$

6.] Le mouvement étant uniforme on a

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

avec $\frac{dz}{dt} = -V_0$ or $\frac{dr}{dt} = -V_0 \frac{R}{H}$

D'où $r^2(t) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2 - V_0^2 \left(1 + \frac{R^2}{H^2}\right)$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{V^2 - V_0^2 \left(1 + \frac{R^2}{H^2}\right)}}{R \left(1 - \frac{V_0}{H} t\right)}$$

7.] On a $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-AV_0 R/H}{R - V_0 \frac{R}{H} t} \left(-\frac{H}{RV_0}\right)$

On intègre par rapport au temps

$$\theta(t) = -\frac{HA}{RV_0} \ln \left(R - V_0 \frac{R}{H} t\right) + C_2$$

avec $\theta(0) = 0 = -\frac{HA}{RV_0} \ln R + C_2$

$$\theta(t) = \frac{HA}{RV_0} \ln \frac{1}{1 - \frac{V_0}{H} t}$$

8.] $\theta(r) = \frac{HA}{RV_0} \ln \frac{R}{r}$

$$r(\theta) = R e^{-\frac{RV_0 \theta}{HA}}$$

g] τ = durée de la chute

On a $z(t) = H - V_0 t$

à $t = \tau$ $z(\tau) = 0 = H - V_0 \tau$

$$\tau = \frac{H}{V_0}$$

AN: $\tau = \frac{8}{0,25} = 32 \text{ s}$

Le mouvement étant uniforme $d = V \tau$

AN $d = 1,2 \times 32$ $d = 38,4 \text{ m}$

B – Dynamique du point

Exercice 1 Flocon de neige, goutte d'eau et bulle

1. Chute d'un flocon

Système étudié : flocon de neige N de volume V
 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ et de masse $m = \rho \cdot V$

Référentiel terrestre supposé galiléen

1) Bilan des forces s'exerçant sur N :

- $\vec{P}$ son poids $\vec{P} = m \vec{g}$
 $= m g \vec{e}_3$

avec $\vec{e}_3$ vecteur unitaire vertical descendant

$$\vec{P} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \vec{e}_3$$

- $\vec{\pi}_a$ la poussée d'Archimède

$$\vec{\pi}_a = -\rho_a V \vec{g}$$

$$= -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_a \vec{e}_3$$

- $\vec{F}$ la force de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{v}$
 avec $\vec{v} = v \vec{e}_3$

Soit $\vec{R}$ la résultante des forces

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{P} + \vec{\pi}_a + \vec{F} \\ &= m g \vec{e}_3 - \rho_a V \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{v} \end{aligned}$$

$$\vec{R} = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho_a) g - 6\pi\eta R v \right) \vec{e}_3$$

2) D'après la 2^{ème} loi de Newton

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{\pi}_a + \vec{F}$$

Soit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho_a) \vec{g} - 6 \pi \eta R \vec{v}$

$\vec{P}$ et $\vec{\Pi}_a$ sont selon $\vec{e}_3$; $\vec{v}(t=0) = \vec{0} \Rightarrow$ tout se passe selon $\vec{e}_3$

$$\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{dv}{dt} = -6 \pi \eta R v + \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho_a) g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6 \pi \eta}{\frac{4}{3} \pi R^2 \rho} v = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g$$

On a bien $\frac{dv}{dt} + \alpha v = \beta$

avec $\alpha = \frac{6 \pi \eta}{\frac{4}{3} \pi R^2 \rho}$ $\alpha = \frac{9 \eta}{2 \rho R^2}$

et $\beta = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g$

3.] Soit v_∞ la vitesse limite acquise par le flocon lors de sa chute. On a alors $\frac{dv}{dt} = 0$.

D'où $v_\infty = \frac{\beta}{\alpha}$ $v_\infty = \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g}{\frac{9 \eta}{2 \rho R^2}} \cdot 2 \rho R^2$

$v_\infty = 2,7 \text{ m s}^{-1}$ ou $v_\infty = 9,7 \text{ km h}^{-1}$

4.] Par définition $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$ $\mathcal{P} = -6 \pi \eta R v^2$

Extrait de X MP 2008 :

2. Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère

Temps de transit de gouttes d'eau

a) Système étudié = goutte d'eau sphérique indéformable

$$m = \rho V = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces $\vec{P} = m \vec{g}$ le poids

$$\vec{F} = -6 \pi \eta \frac{a}{1 + l/a} \vec{v}$$

le trainée
D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} \quad \text{avec } \vec{p} = m \vec{v}$$

$$\Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} + 6 \pi \eta a \frac{\vec{v}}{1 + l/a} = m \vec{g}$$

Selon $\vec{e}_3$ $\frac{dv}{dt} + \frac{6 \pi \eta}{m} \frac{a}{1 + \frac{l}{a}} v = g$

Soit $\vec{v}_{\text{lim}}$ la vitesse limite de chute

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m \vec{g}}{6 \pi \eta a} \left(1 + \frac{l}{a}\right) \quad \left(\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}\right)$$

b) Pour $a_1 = 0,01 \text{ mm}$ $v_{\text{lim}_1} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi a_1^3 g}{6 \pi \eta a_1} \left(1 + \frac{l}{a_1}\right)$

$$v_{\text{lim}_1} = \frac{2 a_1^2 g \rho}{9 \eta} \left(1 + \frac{l}{a_1}\right) \quad v_{\text{lim}_1} = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

$$v_{\text{lim}_2} = 1,28 \cdot 10^0 \text{ m s}^{-1}$$

c) Soit τ le temps caractéristique du régime transitoire

$$\tau = \frac{1 + l/a}{6 \pi \eta a} \rho \frac{4}{3} \pi a^3 = \left(1 + \frac{l}{a}\right) \frac{\rho a^2}{9 \eta}$$

$$\tau_1 = \left(1 + \frac{7 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 10^{-5}}\right) \frac{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{9 \cdot 1,7 \cdot 10^{-5}} \quad \tau_1 = 1,3 \text{ ms}$$

$$\tau_2 = \left(1 + \frac{7 \cdot 10^{-8}}{10^{-4}}\right) \frac{10^3 \times 2 \times 10^{-8}}{9 \times 1,7 \times 10^{-5}} \quad \tau_2 = 131 \text{ ms}$$

⇒ On peut considérer le mouvement des gouttes comme uniforme.

$$T_1 = \frac{H}{V_{\text{lim}_1}} \quad T_1 = 6,2 \cdot 10^5 \text{ s} = 172 \text{ h} !$$

$$T_2 = \frac{H}{V_{\text{lim}_2}} \quad T_2 = 6,2 \cdot 10^3 \text{ s}$$

(d) Pour des bulles

$$m = \rho V' \quad \text{avec} \quad V' = \frac{4}{3} \pi (a_2^3 - (0,9 a_2)^3)$$

$$V_{\text{lim}} = \frac{4}{3} \pi a_2^3 \left[1 - 0,9^3 \right] g \frac{1 + 1/a_2}{6 \pi \eta g_2}$$

$$T' = 2,3 \cdot 10^4 \text{ s}$$

3. Chute d'une goutte

Accélération. On néglige $\vec{F}_r$.

(c) PFD $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}$ avec $\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$

D'où $\frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} = mg$

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} v + \frac{dv}{dt} = g$$

Soit $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} v^2 = g$

On pose $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{g}{1}}$

On a $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} (v_{\text{lim}}^2 - v^2)$

$$\frac{dv}{v_{\text{lim}}^2 - v^2} = \frac{1}{2} \quad \text{pour } v \neq v_{\text{lim}}$$

Décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{v_{\text{lim}}^2 - v^2} = \frac{\alpha}{v_{\text{lim}} + v} + \frac{\beta}{v_{\text{lim}} - v}$$

$$= \frac{\alpha v_{\text{lim}} - \alpha v + \beta v_{\text{lim}} + \beta v}{v_{\text{lim}}^2 - v^2}$$

D'où $\alpha = \beta = 1/2 v_{\text{lim}}$

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{v_{\text{lim}} + v} + \frac{\frac{dv}{dt}}{v_{\text{lim}} - v} = 2v_{\text{lim}} \frac{1}{l}$$

$$\ln \frac{v + v_{\text{lim}}}{v_{\text{lim}} - v} = 2v_{\text{lim}} \frac{t}{l} + A$$

avec à $t=0$ $v=0 \Rightarrow A=0$

$$\frac{v(t) + v_{\text{lim}}}{v_{\text{lim}} - v(t)} = e^{2\sqrt{gl} t}$$

$$\Leftrightarrow v(t) + v_{\text{lim}} = v_{\text{lim}} e^{2\sqrt{gl} t} - v(t) e^{2\sqrt{gl} t}$$

$$v(t) = v_{\text{lim}} \frac{e^{2\sqrt{gl} t} - 1}{e^{2\sqrt{gl} t} + 1}$$

$$v(t) = v_{\text{lim}} \tanh \sqrt{gl} t$$

(b) τ_v temps caractéristique d'évolution de la vitesse

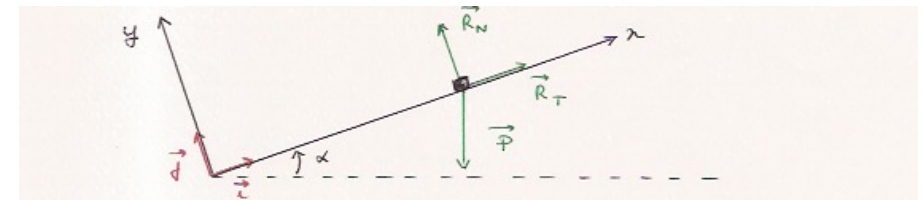
$$\tau_v = \frac{1}{\sqrt{gl}}$$

et $v_{\text{lim}} = \sqrt{gl}$

(c) $\tau_v = 14 \text{ s}$

$$v_{\text{lim}} = 140 \text{ ms}^{-1}$$

Exercice 2 Mesure d'un coefficient de frottement



① Le système "petit morceau de verre" dans le référentiel d'étude considéré galiléen est immobile.

D'après la 2^{ème} loi de Newton $\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$

Suiv $\vec{x}$: $0 = -mg \sin \alpha + R_T$

Suiv $\vec{y}$: $0 = -mg \cos \alpha + R_N$

$$\begin{aligned} R_T &= mg \sin \alpha \\ R_N &= mg \cos \alpha \end{aligned}$$

② Pour que le morceau de verre ne glisse pas, il faut :

$$\|\vec{R}_T\| \leq \mu \|\vec{R}_N\|$$

soit $mg \sin \alpha < \mu mg \cos \alpha$

$$\tan \alpha \leq \mu$$

③ A la limite $\tan \alpha = \mu$ $\mu = \tan 35^\circ$

$$\mu = 0,70$$

④. $\alpha = 45^\circ$, le morceau de verre glisse et $R_t = \mu R_N$.

D'après la 2^{ème} loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

Sur $\vec{x}$: $m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + R_t$

Sur $\vec{y}$: $m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + R_N = 0$.

soit $R_N = mg \cos \alpha$ et $R_t = \mu mg \cos \alpha$.

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha$$

$$\dot{x}(t) = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)t + 0$$

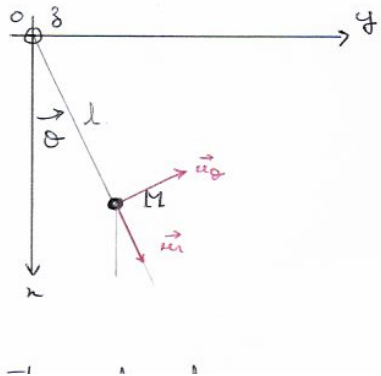
$$x(t) = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \frac{t^2}{2} + x_0$$

Remarque : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \mu$. x décroît (logique).

Exercice 3 Pendule

Extrait d'ENSTIM 1996

A. Le pendule simple non amorti.



Considérons le système point matériel M de masse m dans le référentiel R galiléen.

Forces : • $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ la tension du fil

$$\begin{aligned} \bullet \vec{P} &= m\vec{g} = mg\vec{u}_y \\ &= mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

I.1.2. On projette la 2^{ème} loi de Newton sur le repère polaire $(O; \vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$

$$ma_r = -T + mg \cos \theta$$

$$ma_\theta = -mg \sin \theta$$

avec $\vec{OM} = l\vec{u}_r$ $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta - l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r$$

Soit $\boxed{ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0}$

I.1.3. Pour de faibles elongations $\sin \theta \approx \theta$

d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0} \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$\Rightarrow \theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ A et B constantes d'intégration.

A $t=0$ $\theta(t=0) = \theta_0 = A$
 $\dot{\theta}(t=0) = 0 = +B\omega_0$

d'où $\underline{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$

B. L'oscillateur amorti.

2.1) On considère le point mobile M dans un référentiel R galiléen. Il est soumis à :

- $\vec{P} = m\vec{g}$ son poids
- $\vec{T} = -T\vec{u}_1$ tension du fil
- $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ frottements.

D'après la 2^{ème} loi de Newton on a :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$$

sur $\vec{u}_0$: $ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta - \alpha l \frac{d\theta}{dt}$

soit $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0}$ pour $\sin\theta \approx \theta$

où $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\alpha}{l} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$ (1)

avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ et $\frac{\alpha}{l} = \frac{\alpha}{m} \quad \boxed{\tau = \frac{2m}{\alpha}}$

τ temps caractéristique de l'amortissement.

2.2) Soit $r^2 + \frac{\alpha}{l} r + \omega_0^2$ l'équation caractéristique associée à (1)

$$\Delta = \frac{\alpha^2}{l^2} - 4\omega_0^2$$

Pour avoir un régime pseudo-périodique il faut $\Delta < 0$ soit $\omega_0^2 > \frac{1}{4\tau^2}$

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2l} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}}} \quad \text{pseudo-pulsation}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\right)^{-1/2}} \quad \text{pseudo-période}$$

$$\theta(t) = A e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\delta = \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \ln e^{T/\tau} = \frac{T}{\tau} \quad \boxed{\delta = \frac{T}{\tau}}$$

2.3. a) $\delta = \ln \frac{\theta(B)}{\theta(C)} \quad \delta = 0,110$

b) $T = \frac{t(D) - t(A)}{7} \quad T = 1,1 \text{ s}$

c) $\tau = \frac{T}{\delta} \quad \tau = 10 \text{ s}$

d) $\alpha = \frac{\tau}{2m} \quad \alpha = 0,094 \text{ N.m}^{-1} \text{ s}$

C – Énergie

Exercice 1 Voiture réduite à un point matériel

Voiture réduite à 1 point matériel

Système étudié : véhicule assimilé à 1 pt M de masse m
 Référentiel terrestre galiléen

A. Marche avant à puissance constante

A1. Action : moteur développant une puissance constante

 P_0 $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ vecteur position

D'après le théorème des puissances cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = P_0 \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m v(t)^2$$

Soit $E_c(t) = P_0 t + 0 \quad (\text{à } t=0 \quad \vec{v}(0) = \vec{0})$

$$\frac{1}{2} m v^2(t) = P_0 t$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{2 P_0 t}{m}}$$

Soit $\gamma(t)$ l'accélération $\gamma(t) = \frac{dv}{dt}$

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{2 P_0}{m}} \times \frac{1}{2} t^{-1/2}$$

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{P_0}{2 m t}}$$

ou $\frac{dE_c}{dt} = m v(t) \gamma(t) = P_0$

$$\gamma(t) = \frac{P_0}{m} \times \sqrt{\frac{m}{2 P_0 t}}$$

$$\text{On a } \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2 P_0}{m}} t^{1/2}$$

$$r(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 P_0}{m}} t^{3/2} + 0 \quad \text{à } t=0 \quad r(0) = 0$$

A2.

$$t^{1/2} = \sqrt{\frac{m}{2 P_0}} v(t)$$

$$r(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 P_0}{m}} \left(\frac{m}{2 P_0} \right)^{3/2} v^3(t)$$

$$r(v) = \frac{2}{3} \frac{m}{2 P_0} v^3(t) \quad \leftarrow m^3 s^{-3}$$

$\uparrow \text{ kg } m s^{-2} \quad m s^{-1}$

$$r(t) = \frac{m}{3 P_0} v^3(t)$$

$$\text{A3} \quad n_{gokw/h} = \frac{1,2 \text{ } 10^3}{3,75 \text{ } 10^3} \left(\frac{90 \text{ } 10^3}{3,6 \text{ } 10^3} \right)^3$$

$$= 83 \text{ m.}$$

B. Prise en compte des forces de frot.

$$\|\vec{f}\| = k m v^2$$

B1. TEC entre t et $t+dt$:

$$dE_c = (P_0 - k m v^3) dt \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$dE_c = m v dv$$

D'où $m v \frac{dv}{dt} = P_0 - k m v^3$

$$\Leftrightarrow \frac{m v^2 dv}{P_0 - k m v^3} = v dt = dr$$

B.2] On a $dm = \frac{m\omega^2 dr}{3k} \times \frac{1}{3k}$

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{3k} \left[-\ln(P_0 - m\omega^2 r^3) \right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{1}{3k} \ln \frac{P_0}{P_0 - m\omega^2 r^3}$$

B.3] V_∞ vitesse limite est telle que $E_c = \text{cte}$

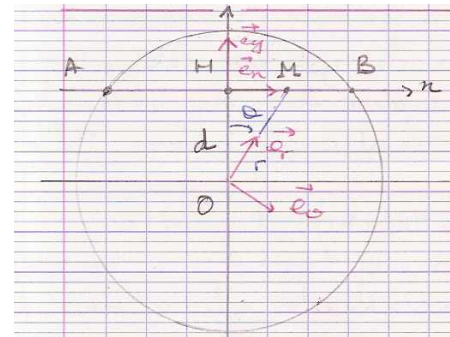
et $dE_c = 0 \Leftrightarrow m k V_\infty^3 = P_0 \Leftrightarrow V_\infty = \sqrt[3]{\frac{P_0}{mk}}$

B.4] $x(r) = \frac{1}{3k} \ln \frac{V_\infty^3}{V_\infty^3 - r^3}$

B.5] $k = \frac{1}{3x} \ln \frac{V_\infty^3}{V_\infty^3 - r^3}$ $k =$
 On a $k = \frac{P_0}{m V_\infty^3}$ $k = \frac{75 \text{ J/s}}{4,2 \text{ kg}^3 \times \left(\frac{180 \text{ J/s}}{3,6 \text{ kg}^3}\right)^3}$
 $k = 5,0 \text{ lo}^{-4} \text{ m}^{-1}$

B.6] $X = \frac{1}{3k} \ln \frac{V_\infty^3}{V_\infty^3 - r^3}$ $X = 89 \text{ m}$

Exercice 2 Tunnel terrestre



1] M est soumis à

$$\vec{f} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$$

avec $\vec{OM} = r \vec{e}_r$

$\delta W(\vec{f}) = \text{travail élémentaire de cette force}$

Si cette force dérive d'une énergie potentielle on a alors

$$\delta W(\vec{f}) = -dE_p$$

Or $\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$ avec $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r$
 et $d\vec{e}_r \perp \vec{e}_r$

D'où $\vec{f} \cdot d\vec{OM} = -mg_0 \frac{r}{R} dr = -dE_p$

$$\frac{dE_p}{dr} = +mg_0 \frac{r}{R}$$

$$E_p(r) = mg_0 \frac{r^2}{2R} + \text{cte}$$

avec $E_p(0) = 0 = \text{cte}$

$$E_p(r) = \frac{mg_0 r^2}{2R}$$

2. En A: $r = R$ $E_p(A) = + \frac{m g_0 R}{2}$

3. On étudie le système véhicule assimilé à 1 point matériel dans le référentiel terrestre galiléen. Il est soumis à :

- $\vec{f}$ l'attraction terrestre
- R action du tunnel $\perp$ au déplacement car le véhicule glisse sans frottement.

$$\vec{OM} = d \vec{e}_y + r \vec{e}_x$$

$$\text{On a } r = \sqrt{d^2 + x^2}$$

D'où $E_p(x) = \frac{m g_0}{2R} (d^2 + x^2)$

4. $\vec{R}$ ne travaille pas et $\vec{f}$ est 1 force conservatrice donc, d'après le théorème de l'énergie mécanique $dE_m = 0$

$$E_m = E_c + E_p = \text{cte}$$

Avec, par définition $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

D'où $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{m g_0}{2R} (d^2 + x^2) = E_p(A)$

v est maximale quand $E_p(x)$ est minimale donc pour $x = 0$

$$\text{On a } \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{m g_0 d^2}{2R} = \frac{m g_0 R}{2}$$

$$v_m^2 = g_0 \left(R - \frac{d^2}{R} \right)$$

$$v_m = \sqrt{g_0 R} \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}} \quad v_m = 5,06^3 \text{ ms}^{-1}$$

5. On a $\frac{1}{2} m \ddot{x}^2 + \frac{m g_0}{2R} (d^2 + x^2) = E_p(A)$

En dérivant cette expression par rapport au temps on obtient

$$m \ddot{x} \dot{x} + \frac{m g_0}{R} x \dot{x} = 0$$

Soit

$$\ddot{x} + \frac{g_0}{R} x = 0$$

$x(t)$ est de la forme

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{g_0}{R}} t + B \sin \sqrt{\frac{g_0}{R}} t$$

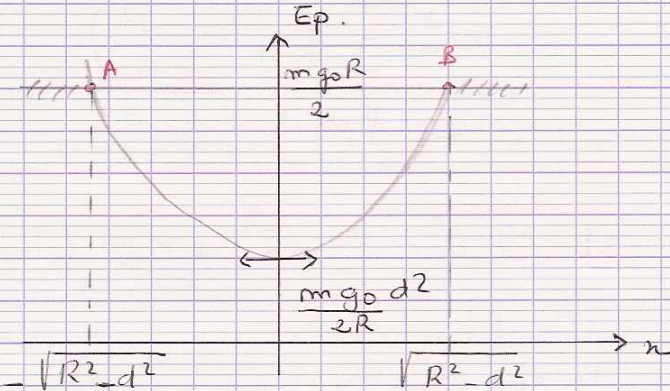
avec $x(0) = -\sqrt{R^2 - d^2}$ et $\dot{x}(0) = 0 = B \sqrt{\frac{g_0}{R}}$

$$x(t) = \sqrt{R^2 - d^2} \cos \sqrt{\frac{g_0}{R}} t$$

$$\dot{x}(t) = +\sqrt{R^2 - d^2} \sqrt{\frac{g_0}{R}} \sin \sqrt{\frac{g_0}{R}} t$$

$$v_m = \sqrt{g_0 R} \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}} \quad (\text{OK})$$

6. On a $E_p(x) = \frac{mg_0}{2R} (d^2 + x^2)$



M va osciller de manière harmonique entre A et B

7. On a $AB = 400 \text{ km}$

$d + p = R \quad \Leftrightarrow \quad d = R - p$

et $d^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2$

$R - p = \sqrt{R^2 - \frac{A^2 B^2}{4}}$

$p = R - \sqrt{R^2 - \frac{A^2 B^2}{4}}$

$-R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{A^2 B^2}{4R^2}} \right) = \frac{A^2 B^2}{8R}$

$p = 3,1 \text{ km}$

$v_m = \sqrt{g_0 R \left(1 - \frac{d^2}{R^2} \right)} = \sqrt{\frac{g_0}{R} (R-d)(R+d)}$

$v_m = 245 \text{ ms}^{-1}$
 $= 896 \text{ km h}^{-1} !$

D – Loi du moment cinétique

Exercice 1 Palet sur demi-sphère

- Système : palet M supposé ponctuel.
— Référentiel : terrestre supposé galiléen.
— Forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction du support R_N normale au support car il n'y a pas de frottements.

- Par définition, $\vec{L}_O(A) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}_0 = \vec{0}$ car $\vec{v}_0 = \vec{0}$.

- Par définition, $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$, avec $\vec{OM} = R\vec{e}_r$, et

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

D'où

$$\vec{L}_O(M) = mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

- Par définition : $\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = R\vec{e}_r \wedge mg(-\cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = +Rmg \sin \theta \vec{e}_z.$$

De même $\vec{M}_O(\vec{R}_N) = \vec{OM} \wedge \vec{R}_N = \vec{0}$ car $\vec{OM}$ et $\vec{R}_N$ sont colinéaires.

$$\vec{M}_O(\vec{R}_N) = \vec{0}.$$

- D'après le théorème du moment cinétique en O fixe dans le référentiel d'étude :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R}_N)$$

D'où $mR^2\ddot{\theta} = Rmg \sin \theta$.

Équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

- D'après le théorème de l'énergie cinétique entre les point A et M :

$$E_c(M) - E_c(A) = W_{A \rightarrow M}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow M}(\vec{R}_N)$$

avec $E_c(M) = \frac{1}{2}mv^2$, $E_c(A) = 0$, $W_{A \rightarrow M}(\vec{R}_N) = 0$ car $\vec{R}_N$ est perpendiculaire au déplacement et

$$W_{A \rightarrow M}(\vec{P}) = \vec{AM} \cdot \vec{P} = (\vec{AO} + \vec{OM}) \cdot \vec{P} = mg(R - R \cos \theta).$$

D'où $\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos \theta)$,

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$$

7. On a $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}\vec{e}_\theta$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}(1 - \cos \theta)}$$

8. D'après la deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$ avec

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

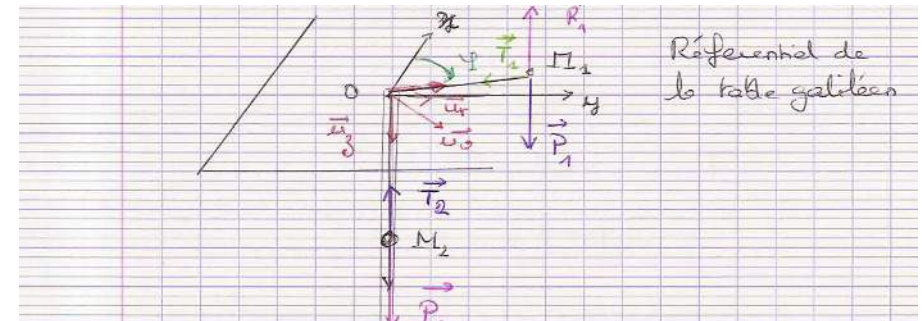
Selon $\vec{e}_r$: $-mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + R_N$, soit $R_N = -mR\frac{2g}{R}(1 - \cos \theta) + mg \cos \theta$

$$R_N = mg(3 \cos \theta - 2)$$

9. Le palet quitte le dôme lorsque R_N s'annule, soit $3 \cos \theta_m = 2$,

$$\cos \theta_m = \frac{2}{3}$$

Exercice 2 Point matériel sur un plan



Référentiel de la table galiléen

1. Bilan des forces.

Sur M_1 :

- $\vec{P}_1 = m\vec{g}$ poids de M_1
- $\vec{R}_1 = R_1 \vec{e}_y$ action normale de la table sans frottement
- $\vec{T}_1 = -T_2 \vec{e}_t$ action du fil

Sur M_2 :

- $\vec{P}_2 = m\vec{g}$ poids de M_2
- $\vec{T}_2$ = action du fil
- $\vec{R}_2 = \vec{0}$ action du tube vertical.

2. Deuxième loi de Newton pour M_1 .

$$m\vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1$$

avec

$$\vec{OM}_1 = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{OM}_1}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \ddot{r} \vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r$$

D'où

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -T_2 \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \\ 0 = mg - R_1 \end{cases}$$

Deuxième loi de Newton pour M_2 :

$$m \vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2$$

$$m \ddot{z} = mg - T_2$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \vec{J}_O(M_2) &= \vec{OM}_2 \wedge m \vec{u}_2 \\ &= r \vec{e}_2 \wedge m (\dot{r} \vec{e}_1 + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\ \vec{J}_O(M_2) &= m r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\vec{J}_O(M_2) = \vec{OM}_2 \wedge m \vec{u}_2 = \vec{0}$$

4. D'après le théorème du moment cinétique pour le pt M_2 en O fixe

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{J}_O(M_2)}{dt} &= \vec{OM}_2 \wedge \vec{T}_2 + \vec{OM}_2 \wedge (\underbrace{\vec{P}_2 + \vec{R}_2}_{=\vec{0}}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{J}_O(M_2) = \vec{cte} = r^2 \dot{\varphi} m \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\varphi} &= \text{constante} \\ &= r_0^2 \omega_0 \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \text{On a : } \|\vec{T}_1\| &= \|\vec{T}_2\| \\ \bullet \quad m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) &= -T_2 \\ \bullet \quad m \ddot{z} &= mg - T_2 \\ \bullet \quad g + r &= L \quad \Leftrightarrow \ddot{z} = -\ddot{r} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \ddot{r} - r \omega_0^2 \frac{r_0^4}{r^4} = -g + \ddot{z}$$

$$= -g - \ddot{r}$$

$$\Leftrightarrow 2\ddot{r} - \frac{\omega_0^2 r_0^4}{r^3} = -g$$

$$\Leftrightarrow 2\ddot{r} - \frac{K}{r^3} = -g$$

$$\text{avec } K = \omega_0^2 r_0^4$$

6. M_2 décrit un mouvement circulaire $\ddot{r} = 0$.

$$\omega_0^2 = \frac{g}{r_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r_0}}$$

E – Solide

Exercice 1 Roue de vélo

1) $J_D = mR^2$ moment d'inertie de la roue

$J_D = 0,17 \text{ kg m}^2$

2) $\mathcal{M}_D(2\vec{F}) = \mathcal{M}_O(2\vec{F}) \cdot \vec{e}_D$
 $= (\vec{OP} \wedge 2\vec{F}) \cdot \vec{e}_y$
 $= -2FR$

3) On étudie le système roue dans le référentiel terrestre galiléen. Il est soumis à
 $\vec{P}$ son poids point d'application O.
 $\vec{R}$ action de l'axe de rotation
 $2\vec{F}$ action des freins

D'après le théorème des moments cinétique par rapport à l'axe D

$$\frac{dJ_D(\text{roue})}{dt} = \mathcal{M}_D(\vec{P} + \vec{R} + 2\vec{F})$$

$$= -2FR$$

Avec $J_D(\text{roue}) = J_D \dot{\theta}$

D'où $J_D \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -2FR$ $\ddot{\theta} = -\frac{2F}{mR}$

4) $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{2FR}{mR^2}$
 $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{2F}{mR}$

D'où $\dot{\theta}(t) = -\frac{2F}{mR} t + cte$

avec $\dot{\theta}(0) = \omega_0 = cte$

$\dot{\theta}(t) = \omega_0 - \frac{2F}{mR} t$

D'où $\theta(t) = \omega_0 t - \frac{F}{mR} t^2 + 0$

5) On veut $\dot{\theta}(t_f) = 0 \Rightarrow t_f = \frac{mR\omega_0}{2F}$

or $\theta(t_f) = 2\pi$

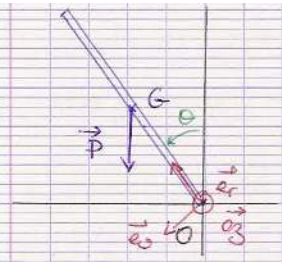
soit $2\pi = \frac{mR\omega_0^2}{2F} - \frac{F}{mR} \times \frac{m^2 R^2 \omega_0^2}{4F^2}$
 $= + \frac{mR\omega_0^2}{4F}$ $F = \frac{mR\omega_0^2}{8\pi}$

$F = 4,7 \text{ N}$

6) Avant le freinage $v = R\omega_0$

$v = 5,0 \text{ ms}^{-1}$
 $= 18 \text{ km h}^{-1}$

Exercice 2 Chute d'une cheminée



Σ = cheminée $\mathcal{S}$
Referentiel terrestre galiléen
Bilan des forces
 * Poids $\vec{P} = M \vec{g}$ en G
 * $\vec{R}$ action de la liaison pivot en O.

1. D'après le théorème du moment cinétique en O

$$\frac{d\vec{J}_O(\mathcal{S})}{dt} = \vec{c}_O(\vec{P}) + \vec{c}_O(\vec{R})$$

||
0 car pivot parfait

$$\vec{c}_O(\vec{P}) = \frac{D}{2} \vec{e}_r \wedge M \vec{g}$$

$$= \frac{D}{2} M g \sin \theta \vec{e}_\theta$$

De plus $\vec{J}_O(\mathcal{S}) = J_O \vec{\Omega}$

D'où $J_O \vec{\Omega} = \frac{D}{2} M g \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3g}{2D} \sin \theta$

2. D'un point de vue énergétique

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2$$

et $E_{pp} = M g \cos \theta + \text{cte.}$

L'action pivot étant parfaite, elle ne travaille pas. Il y a conservation de l'énergie mécanique de la cheminée

$$E_m = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 + M g \cos \theta \frac{D}{2} + \text{cte} = E_{m_0}$$

$$J_O \ddot{\theta} - M g \sin \theta \frac{D}{2} = 0$$

$$\text{avec } J_O = \frac{1}{3} M D^2 \quad \ddot{\theta} - \frac{3g}{2D} \sin \theta = 0$$

3. D'après le principe de la résultante cinétique

$$m \vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\text{avec } \vec{OG} = \frac{D}{2} \vec{e}_r$$

$$\vec{G} = \frac{D}{2} \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(G) = -\frac{D}{2} \ddot{\theta} \vec{e}_r + \frac{D}{2} \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{Sur } \vec{e}_r \quad -M \frac{D}{2} \ddot{\theta} = -M g \cos \theta + R_r$$

$$\text{Sur } \vec{e}_\theta \quad M \frac{D}{2} \ddot{\theta} = M g \sin \theta + R_\theta$$

On obtient $R_\theta = \frac{MD}{2} \ddot{\theta} - Mg \sin \theta$

$$= \frac{MD}{2} \left(\frac{3g}{2D} \sin \theta \right) - Mg \sin \theta$$

$$= Mg \sin \theta \left(\frac{3}{4} - 1 \right)$$

$$R_\theta = -\frac{1}{4} Mg \sin \theta$$

De même $R_r = +Mg \cos \theta - \frac{1}{2} MD \ddot{\theta}$

Or $E_m = \frac{1}{6} MD^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} Mg D \cos \theta + \text{cte}$

avec à $t=0$ $\dot{\theta}(0)=0$ et $\theta(0)=0$.

Soit $\frac{1}{6} D \ddot{\theta}^2 + \frac{g}{2} \cos \theta = \frac{g}{2}$

$$MD \ddot{\theta}^2 = 3gM \left(1 - \cos \theta \right)$$

$$R_r = Mg \cos \theta - \frac{3}{2} Mg (1 - \cos \theta)$$

$$R_r = Mg \left(\frac{5}{2} \cos \theta - \frac{3}{2} \right)$$

4-a. Σ étendue = longueur d de cheminée
de masse $m = \frac{M}{D} d$.

de centre de masse I tel que

$$OI = d/2$$

Bilan des forces = Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ en I
 $\vec{R}$ en O
 $\vec{S}$ en P.

TRC: $m\vec{a}(I) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{S}$

avec $\vec{OI} = \frac{d}{2} \vec{e}_r$ $\vec{v}(I) = \frac{d}{2} \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$$\vec{a}(I) = -\frac{d}{2} \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + \frac{d}{2} \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{P} = m\vec{g} = M \frac{d}{D} g (-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Selon $\vec{e}_\theta$: $M \frac{d}{D} \frac{d}{2} \ddot{\theta} = M \frac{d}{D} g \sin \theta + R_\theta + S_\theta$

$$S_\theta = M \frac{d}{D} \left(\frac{d}{2} \frac{3g}{2D} \sin \theta - g \sin \theta \right) + \frac{1}{4} Mg \sin \theta$$

$$S_\theta = Mg \sin \theta \left[\frac{3d^2}{4D^2} - \frac{d}{D} + \frac{1}{4} \right]$$

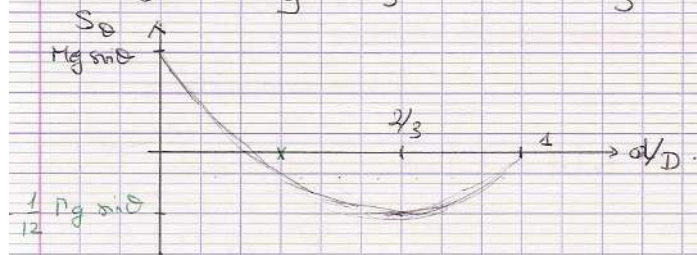
b. On pose $x = \frac{d}{D}$ $x \in [0, 1]$.

$$\frac{f(x)}{4} = \frac{3}{4} x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{df}{dx} = 6x - 4 \quad \frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$f(0) = 1 \quad f(1) = 0.$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \frac{4}{9} - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{1}{3}.$$



5. L'effet de cisaillement est le $\oplus$ important au pied de la cheminée.

6. TNC en O pour la longueur d de la cheminée

$$\frac{d\vec{T}_O}{dt} = d\vec{O}(\vec{S} + \vec{R} + \vec{P}) + \mathcal{C}\vec{e}_3$$

$$= S_\theta d\vec{e}_3 + M \frac{d}{D} g \frac{d}{2} \sin\theta \vec{e}_3 + \mathcal{C}\vec{e}_3$$

avec $\vec{T}_O = \frac{1}{3} M \frac{d}{D} d^2 \vec{e}_3$

D'où $\frac{1}{3} M \frac{d^3}{D} \frac{3g}{2D} \sin\theta = Mg d \sin\theta \left[\frac{3d^2}{4D^2} - \frac{d}{D} + \frac{1}{4} \right] + Mg \frac{d^2}{2D} \sin\theta + \mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = Mg d \sin\theta \left[\frac{d^2}{2D^2} - \frac{3d^2}{4D^2} + \frac{d}{D} - \frac{1}{4} - \frac{d}{4D} \right]$$

$$\mathcal{C} = Mg d \sin\theta \left[-\frac{1}{4} \frac{d^2}{D^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{D} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= -\frac{1}{4} Mg d \sin\theta \left(\frac{d^2}{D^2} - 2 \frac{d}{D} + 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{4} Mg d \sin\theta \left(\frac{d}{D} - 1 \right)^2$$

7. $\mathcal{C} = -\frac{1}{4} Mg D \sin\theta \frac{n(n-1)^2}{g(n)}$

$$\frac{dg}{dx} = (n-1)^2 + n \cdot 2(n-1)$$

$$= n^2 - 2n + 1 + 2n^2 - 2n$$

$$= 3n^2 - 4n + 1$$

$$\frac{dg}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3n^2 - 4n + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$n = \frac{4 \pm 2}{6} = 1 \text{ ou } \frac{1}{3}$$

$$\frac{dg}{dx} \Big|_{n=1} = 1 \quad g(1) = 0.$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{9} - \frac{4}{3} + 1 = 0.$$

$$g \text{ est max pour } d = \frac{1}{3} D.$$

F – Forces centrales conservatives

Exercice 1 Étude de la comète 67P Churyomov – Gerasimenko

1. On étudie le mouvement d'une comète de masse m dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen. Elle est soumise à l'interaction gravitationnelle exercée par le Soleil : $\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{M_\odot m}{r^2} \vec{e}_r$.

Repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Éléments cinématiques :

- $\vec{OM} = R\vec{e}_r$, avec R rayon de l'orbite circulaire,
- $\vec{v} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$, vitesse
- $\vec{a} = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{e}_r + R \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta$, accélération.

D'après le principe fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{f}$, soit $m(R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = -\frac{\mathcal{G}mM_\odot}{R^2}\vec{e}_r$, soit $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta}^2 R = \frac{\mathcal{G}M_\odot}{R^2}$.

On en déduit que $\dot{\theta} = \text{cte} = \frac{2\pi}{T}$, soit $T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM_\odot}$.

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}}$$

Pour Chury, en remplaçant R par a , on obtient $T = 6,5$ ans.

2. Repère sphérique, $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$.

Par définition,

$$\boxed{\vec{\sigma}_S = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

D'après le théorème du moment cinétique en S centre du Soleil fixe dans le référentiel d'étude, $\frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} = \vec{r} \wedge \left(-\frac{GM_\odot m}{r^3} \vec{r} \right) = \vec{0}$ (produits vectoriels entre vecteurs parallèles). $\vec{\sigma}_S$ est donc constant et $\vec{r}$ est perpendiculaire à ce vecteur constant, **la trajectoire est donc plane** dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_S$ et passant par S .

On utilise alors le repère polaire, $\vec{r} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

$$\vec{\sigma}_S = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\dot{\theta} \end{pmatrix} \text{ de norme } mr^2\dot{\theta} \text{ pour } \dot{\theta} > 0 \text{ et donc}$$

$$\boxed{\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}}$$

3. Par définition de l'énergie mécanique, $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\odot m}{r}$

$$\text{avec } v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2}, \text{ d'où } E_m = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} \right) - \frac{GM_\odot m}{r}$$

On en déduit $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{\text{eff}}(r)$ avec

$$\boxed{E_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - \frac{GM_\odot m}{r}}$$

1) Système étudié = comète de masse m

Référentiel d'étude = héliocentrique galiléen

Bilan des forces : $\vec{f} = -\frac{GM_\odot m}{r^2} \vec{e}_r$ interaction gravitationnelle exercée par le Soleil.

Éléments cinématiques :

$\vec{OM} = R\vec{e}_r$ R = rayon de l'orbite circulaire

$$\vec{v} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{e}_r + R \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta$$

D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

$$\text{soit } -mR \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM_\odot m}{R}$$

$$\text{or } mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} = \frac{v}{R}$$

Le mouvement est uniforme.

$$-m \frac{v^2}{R} = -\frac{GM_\odot m}{R} \quad v^2 = \frac{GM_\odot}{R}$$

$$\text{avec } v^2 = \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2$$

$$\text{Soit } \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM_\odot}{R}$$

$$\boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2}}$$

Pour la comète Cheury

$$T_c^2 = \frac{4\pi^2 a_c^3}{g_{H_0}} = \frac{8\pi^3 a_c^3}{2\pi g_{H_0}}$$

$$T_c^2 = \frac{(33 \times 10^6)^3}{2\pi \cdot 26^{30} \cdot 6,7 \cdot 10^{-11}}$$

$$= 5 \cdot 10^{16} \text{ s}$$

$$T_c = 6,5 \text{ ans.}$$

2] $\vec{J}_S$ = moment cinétique de la comète par rapport au Soleil

Par définition $\vec{J}_S = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

$$\text{avec } \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{J}_S = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

D'après le TMC $\frac{d\vec{J}_S}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{f} = \vec{0}$

$$\vec{J}_S = \vec{c}$$

or $\vec{J}_S \perp \vec{a}$ et $\vec{S}\vec{P}$ de $\vec{S}\vec{P}$ est de la perpendiculaire à $\vec{J}_S$

passant par S. La mv est per.

$$\underline{c} = \frac{\|\vec{J}_S\|}{m} = \underline{r^2 \dot{\theta}}$$

3] Soit E_m l'énergie mécanique de la comète.

Par définition $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p$

$$\text{avec } v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}$$

$$\text{or } E_p(r) = -\frac{g_{H_0} m}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} - g \frac{M_0 m}{r}$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E_m - E_{\text{eff}}(r)$$

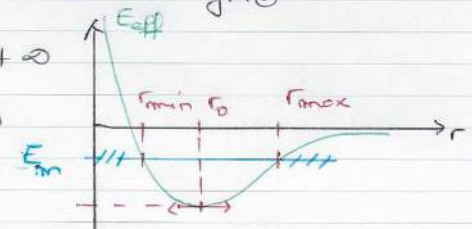
$$\text{avec } E_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} - g \frac{M_0 m}{r}$$

$$\frac{dE_{\text{eff}}(r)}{dr} = -m \frac{c^2}{r^3} + g \frac{M_0 m}{r^2}$$

$$\frac{dE_{\text{eff}}(r_0)}{dr} = 0 \quad \text{avec } r_0 = \frac{c^2}{g M_0}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} E_{\text{eff}}(r) = +\infty$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} E_{\text{eff}}(r) = 0$$



4] Pour $E_m = E_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$ $r_{\text{max}} = r_{\text{min}} = r_0$

$$\text{avec } r_0 = \frac{c^2}{g M_0}$$

$r = \text{cte}$: la trajectoire est circulaire

$$E_0 = \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r_0^2} - g \frac{M_0 m}{r_0}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2} m \frac{g^2 M_0^2}{c^2}$$

$$E_c(r_0) = \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r_0^2} \quad (\dot{r} = 0)$$

$$E_c(r_0) = \frac{1}{2} m \frac{g^2 M_0^2}{c^2} \quad \text{et } E_p(r_0) = -m \frac{g^2 M_0^2}{c^2}$$

$$E_c(r_0) = -2E_p(r_0) = -E_{m0}$$

5] On a pour $r = r_{\min}$ et $r = r_{\max}$ $E_m = E_{\text{pot}}$
car $\dot{r} = 0$

$$\text{soit } E_m = \frac{1}{2} m \frac{v^2}{r^2} - \frac{G M_0 m}{r}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_0 m}{r} - E_m r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r^2 + \frac{G M_0}{E_m} r - \frac{1}{2} \frac{m v^2}{E_m} = 0}$$

$$\Delta = \frac{G^2 M_0^2}{E_m^2} + 2 \frac{m v^2}{E_m} > 0^*$$

$$r_{\min} = -\frac{G M_0}{2 E_m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\text{avec } r_{\min} + r_{\max} = 2a = -\frac{G M_0}{E_m}$$

$$\text{et } r_{\max} - r_{\min} = (a + ae) - (a - ae) = 2ae$$

$$2ae = \sqrt{\Delta}$$

$$* \Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{G^2 M_0^2}{E_m^2} > -2 \frac{m v^2}{E_m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G^2 M_0^2}{E_m^2} > 2 m v^2$$

$$\Leftrightarrow E_m > -\frac{1}{2} m \frac{G^2 M_0^2}{v^2} \quad \text{OK}$$

$$\text{D'où } 4a^2 e^2 = \frac{G^2 M_0^2}{E_m^2} + \frac{2 m v^2}{E_m}$$

$$4a^2 e^2 = 4a^2 + \frac{2 m v^2}{E_m}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2 m v^2}{4a^2 E_m} < 1.$$

$$6]. v_{\text{aer}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad \text{vitesse aréolaire}$$

$v_{\text{aer}} = v_{\text{te}}$. Cette propriété a été identifiée par Kepler

$$\text{Pour une ellipse } S = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

$$\text{avec } 1-e^2 = -\frac{2 m v^2}{4a^2 E_m}$$

$$\text{On a } e = 2v_{\text{aer}} = v_{\text{te}} = \frac{2S}{T}$$

$$\text{soit } \frac{4S^2}{T^2} = v^2 \Leftrightarrow \frac{4\pi^2 a^4 (1-e^2)}{T^2} = v^2$$

$$\Leftrightarrow + \frac{4\pi^2 a^4}{T^2} \left(-\frac{2 m v^2}{4a^2 E_m} \right) = v^2$$

$$\text{avec } -E_m = \frac{G M_0 m}{2a}$$

$$\frac{2 m \pi^2 a^4}{T^2} = -E_m = \frac{G M_0 m}{2a}$$

$$\frac{4\pi^2}{G M_0} = \frac{T^2}{a^3} \quad 3^{\text{e}} \text{ loi de Kepler.}$$

Exercice 2 Satellite solaire

Système étudié = point matériel M de masse m
Référentiel de Copernic galiléen R.

1a) $\vec{F}$ = force de gravitation exercée par le Soleil

$$\vec{F} = -G \frac{M_S m}{r^2} \vec{u}_r$$

b. O est fixe dans R. $\vec{L}_O(M)$ = moment cinétique en O de M

D'après le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$\vec{OM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires

$$\vec{L}_O(M) = \text{cte}$$

c. Par définition $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$\forall t$ $\vec{OM} \perp \vec{L}_O$ qui garde une direction constante.
donc $\vec{OM}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{L}_O$ passant par O,
la trajectoire de M est plane.

d. On utilise un repère polaire $(O; \vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{k})$

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k} = \text{cte}$$

m étant constante $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$ constante

$\Rightarrow C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement -

Si à t_p $\vec{v}_p \perp \vec{OP}$ alors $C = (\vec{r}_p \wedge \vec{v}_p) \cdot \vec{k} = r_p v_p$.

1.e. Soit E_m l'énergie mécanique du point M

Par définition $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$

$$\text{avec } dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = +G \frac{M_S m}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = +G \frac{M_S m}{r^2} dr$$

$$E_p(r) = -\frac{GM_S m}{r} \quad (\text{On prend } E_p(r \rightarrow \infty) = 0)$$

Théorème de l'énergie cinétique $dE_c = \vec{F} \cdot d\vec{r}$
 $= -dE_p$

$$E_m = \text{cte} -$$

2/ La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon R.

$$2a) \vec{OM} = R\vec{u}_r \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\text{D'où plus } C = R^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{R^2} = \text{cte}$$

$\|\vec{v}\| = \frac{C}{R}$ est constante, le mouvement est uniforme.

2b) D'après la 2^e loi de Newton: $m\vec{a} = \vec{F}$
avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{C}{R} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r = -\frac{GM_S m}{mR^2} \vec{u}_r$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r = -\frac{GM_S}{R^2} \vec{u}_r$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{R}}$$

Soit T la durée de révolution - v étant constant, on a,

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad T = \frac{2\pi R}{\sqrt{GM_s/R}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_s}}$$

$$\begin{aligned} 2c. \quad E_c &= \frac{1}{2}mv^2 & E_c &= \frac{1}{2} \frac{GM_s m}{R} \\ E_p &= -\frac{GM_s m}{R} & \rightarrow E_m &= -\frac{1}{2} \frac{GM_s m}{R} \end{aligned}$$

$$2d. \quad T_0 = 365,25 \text{ jours} \quad T_0 = 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$R_0 = \frac{T_0 v_0}{2\pi} \quad R_0 = 1,51 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$\text{or } \boxed{GM_s = R_0 v_0^2} = \frac{4\pi^2 R_0^3}{T_0^2} = \frac{v_0^3 T_0}{2\pi}$$

$$3/. \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad a. \quad \text{Diagram of an ellipse with semi-major axis } a, \text{ semi-minor axis } b, \text{ and focus } S. \text{ Points } A, C, O, P \text{ are marked on the horizontal axis. A point } M \text{ is on the ellipse at distance } r \text{ from focus } S \text{ at angle } \theta \text{ from the horizontal axis.}$$

$$3b. \quad a = \frac{1}{2} \text{ grand axe} \quad 2a = OA + OP = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}$$

$$\boxed{2a = \frac{2p}{1-e^2}}$$

$$3c. \quad \text{Pour } e = 0 \quad r = p = \text{cte} \quad \text{la trajectoire est en } \underline{\text{cercle}}$$

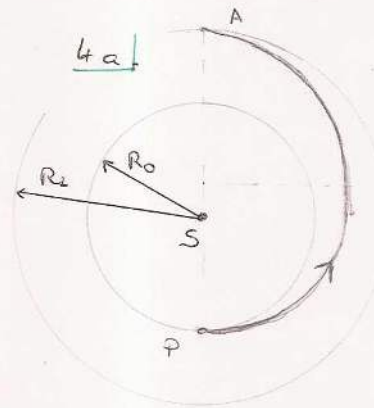
$$3d. \quad E_m = -\frac{1}{2} \frac{GM_s m}{a}$$

$$\text{et } E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_s m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GM_s m}{a}$$

$$v^2 = 2 \left[-\frac{1}{2} \frac{GM_s}{a} + \frac{GM_s}{r} \right]$$

$$\boxed{v^2 = GM_s \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]}$$

4/. Orbite de Mars $R_1 = n R_0$



4b. Soit T_1 la durée de l'année martienne

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{R_1^3}{R_0^3}$$

$$\boxed{T_1 = T_0 \cdot n^{3/2}}$$

$$T_1 = 687,2 \text{ jours terrestres} = 5,937 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$v_1 = \text{vitesse orbitale de Mars} \quad \frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{R_0}{R_1}$$

$$v_1 = v_0 \cdot \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} = \frac{v_0}{\sqrt{n}} \quad \underline{v_1 = 24,30 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}}$$

4c. On doit avoir

$$\text{D'après 3d } v_p^2 = GM_s \left(\frac{2}{R_0} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\text{avec } a = \frac{R_1 + R_0}{2} \quad \text{et } GM_s = R_0 v_0^2$$

$$v_p^2 = R_0 v_0^2 \left(\frac{2}{R_0} - \frac{2}{R_0 + R_1} \right) = v_0^2 \frac{2R_0 + 2R_1 - 2R_0}{R_0 + R_1}$$

$$v_p^2 = v_0^2 \frac{2R_1}{R_0 + R_1} = v_0^2 \frac{2}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$v_p = v_0 \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$$

$$v_p = 32,97 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

4 d)
$$v_A^2 = R_0 v_0^2 \left(\frac{2}{R_n} - \frac{2}{R_0 + R_1} \right)$$

$$= \frac{v_0^2}{n} \left(\frac{2R_0}{R_0 + R_1} \right) = \frac{2v_0^2}{n(1+n)}$$

$$v_A = v_0 \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}$$

$$v_A = 21,63 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

$$v_p - v_A = 11,34 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

4 e) Soit T la durée des transfert

$$T = \frac{T_{\text{ellipse}}}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2 a^3}{R_0 v_0^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (1+n)^3 R_0^2}{8 v_0^2}}$$

$$T = \frac{R_0}{v_0} \pi \left(\frac{1+n}{2} \right)^{3/2}$$

$$T = \frac{T_0}{2} \left(\frac{1+n}{2} \right)^{3/2}$$

$$T = 258,9 \text{ jours} = \underline{0,709 \text{ années terrestres}}$$