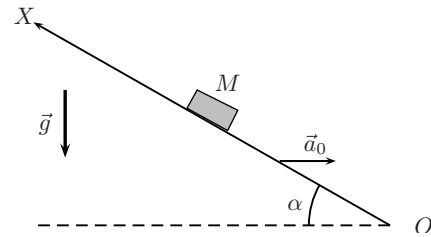


A – Référentiels non galiléen

Exercice A – 1 Plan incliné en translation../..

Un point matériel M , de masse m , peut glisser sans frottement sur un support plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Ce plan est en mouvement de translation uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a}_0$ horizontale par rapport à un référentiel galiléen. On étudie le mouvement du point M suivant la ligne de plus grande pente (OX).

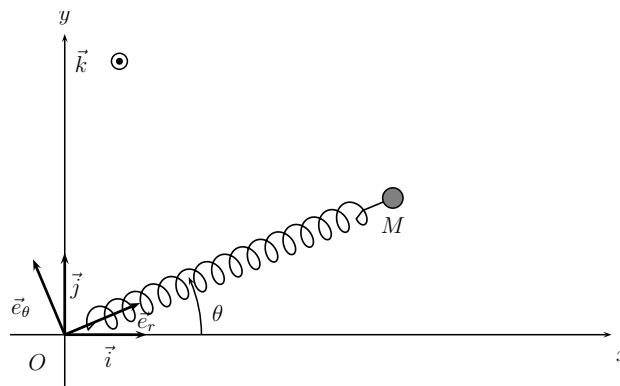


1. Établir l'expression de l'accélération $\vec{X}$ du point M relativement au plan incliné.
2. À la date $t=0$, le point est abandonné sans vitesse initiale par rapport au plan. À quelle condition sur l'angle α le point remonte-t-il la pente ?

Exercice A – 2 Étude d'un ressort dans 2 référentiels

Extrait du "CONCOURS COMMUN 2002 DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES".

A. Étude d'un ressort dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire.



Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le **plan horizontal** (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant la **verticale** (Oz) : $\vec{g} = -g\vec{k}$.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide ℓ_0 , de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en O . La position de M est repérée dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ou dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ par $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

1. Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique $\vec{L}_O$ par rapport à O .
2. À $t = 0$, la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur $\ell = 1,2 \cdot \ell_0$: $\vec{OM}(t = 0) = 1,2 \cdot \ell_0 \vec{i}$.
 - (a) Calculer $\vec{L}_O$. Quelle est la nature de la trajectoire ?
 - (b) Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort, $\ell(t) = OM(t)$. Préciser l'intervalle de variation de ℓ , longueur du ressort.
3. On lance la particule d'un point $\vec{OM}_0 = \vec{OM}(t = 0) = \ell_1 \cdot \vec{i}$, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = \ell_1 \omega \vec{j}$, orthogonale à $\vec{OM}_0$. Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O, x, y) .
 - (a) Préciser $\vec{L}_O$ en fonction r et $\frac{d\theta}{dt}$ puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera L , le module de $\vec{L}_O$.
 - (b) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique.
Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ?

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique, E_m .

Préciser l'expression de E_m :

- en fonction des conditions initiales,
- en fonction de r , $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, m , k et ℓ_0 .

(c) Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{\text{eff}}(r).$$

Préciser l'expression de $E_{\text{eff}}(r)$. Tracer l'allure de $E_{\text{eff}}(r)$.

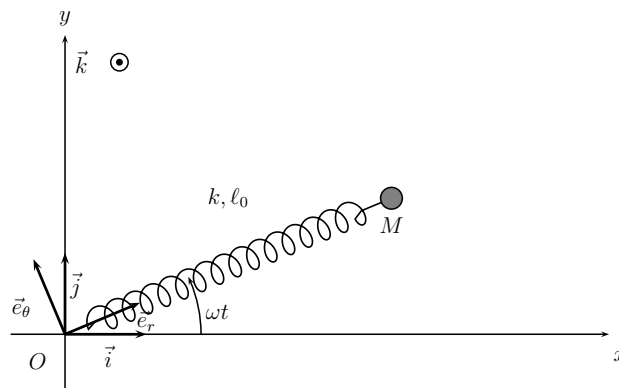
- (d) La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?
 - (e) La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours de son mouvement ?
 - (f) La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?
4. On cherche à déterminer une condition entre ℓ_1 et ω pour avoir un mouvement circulaire.
- (a) Montrer que, dans ce cas, le mouvement est uniforme.
 - (b) Déterminer ℓ_1 en fonction de k , ℓ_0 et ω . Est-elle valable pour tout ω ?

B. Étude dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Le mouvement est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur vitesse $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$, et associé au repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

On considère une particule M de masse m pouvant se mouvoir sans frottement le long de l'axe $(O, \vec{e}_r)$. Le champ de pesanteur est toujours suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g \vec{k}$.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide ℓ_0 , de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en O . La position de M est repérée dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ par $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.



1. Préciser les expressions vectorielles des forces d'inertie dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.
2. Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle E_{pfe} que l'on précisera.
3. En est-il de même pour la force d'inertie de Coriolis ?
4. Déterminer l'énergie potentielle totale. Tracer l'allure de $E_p(r)$. On distinguera les 3 cas possibles selon la valeur de ω .
5. Déterminer la longueur ℓ_2 correspondant à la position d'équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

À quelle condition sur ω le résultat est-il possible ? Cet équilibre est-il stable ?

Quel est alors le mouvement dans le référentiel du laboratoire ?

6. Comparer ℓ_2 à ℓ_1 du paragraphe précédent. Conclusion.

Exercice A – 3 Le satellite océanographique Jason 2

Extrait du sujet Centrale-Supélec MP 2012

Lancé le 20 juin 2008 de Vandenberg (Californie), le satellite océanographique Jason 2 permet, entre autre, de mesurer la hauteur des océans.

Dans une première partie, le problème étudie la trajectoire de ce satellite au-dessus de l'ionosphère, d'abord en considérant la Terre comme sphérique, puis en prenant en compte sa non-sphéricité.

Données utiles

Constante de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6378 \text{ km}$
Vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même dans le référentiel géocentrique	$\omega_T = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données de l'énoncé.

I – Étude de l'orbite

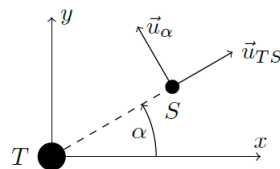


Figure 1

- Rappeler l'expression de la force de gravitation $\vec{F}$ qu'exerce la Terre (centre T , masse M_T) sur un satellite (point matériel S , masse m), en fonction de la constante de gravitation G , des masses M_T et m , de la distance $r = TS$ et du vecteur unitaire $\vec{u}_{TS} = \frac{\vec{TS}}{TS}$.
- On se place dans le référentiel géocentrique (T, x_g, y_g, z_g) noté $(\mathcal{R}_g)$, de base fixe $(\vec{e}_{x_g}, \vec{e}_{y_g}, \vec{e}_{z_g})$ (figure 2b).

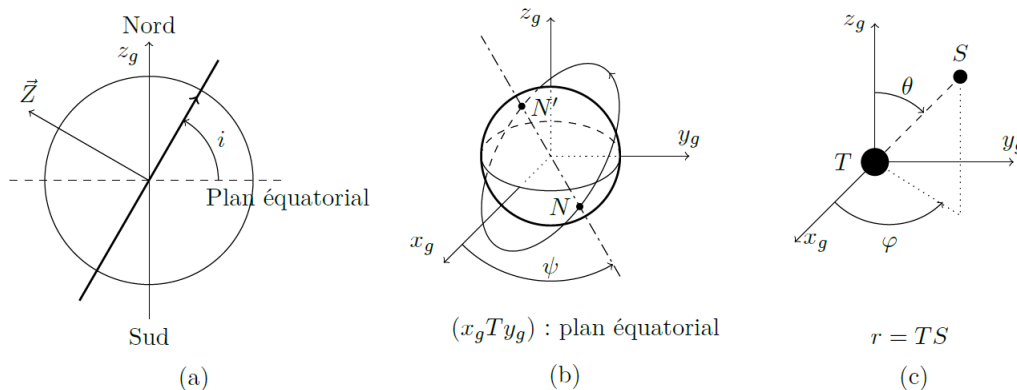


Figure 2

- (a) Définir le référentiel géocentrique. Pourquoi ce référentiel n'est-il pas rigoureusement galiléen ? Justifier.

Dans toute la suite, le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_g)$ est considéré comme galiléen et, sauf mention contraire, seule l'action de la Terre est prise en compte.

- (b) Dans ce référentiel, quelles sont les deux grandeurs mécaniques du satellite qui se conservent (on justifiera la réponse) ? Quelles caractéristiques du mouvement peut-on en déduire ?

3. On se propose d'établir l'expression de la trajectoire du satellite autour de la Terre à partir de l'invariant dynamique de Runge-Lenz. On définit le vecteur de Runge-Lenz par $\vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{\sigma}_T - GM_T m \vec{u}_{TS}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du satellite dans $(\mathcal{R}_g)$ et $\vec{\sigma}_T$ le moment cinétique du satellite dans $(\mathcal{R}_g)$, calculé en T .

- (a) Calculer $\frac{d\vec{R}}{dr}$ dans $(\mathcal{R}_g)$. Conclure.
 (b) Dans quel plan se trouve $\vec{R}$? Justifier.
 (c) On note R la norme de $\vec{R}$ et β l'angle entre $\vec{R}$ et $\vec{TS}$.

Montrer que $\vec{R} \cdot \vec{u}_{TS} = \frac{\sigma_T^2}{mr} - GM_T m$ où σ_T est la norme du moment cinétique $\vec{\sigma}_T$ du satellite. En déduire l'expression de la trajectoire du satellite sous la forme

$$r(\beta) = \frac{p}{1 + e \cos \beta}$$

donner les expressions de p et e en fonction de σ_T, G, M_T, m et R . Suivant les valeurs de e , rappeler les différentes trajectoires possibles.

4. On admet que la trajectoire de Jason 2 est circulaire (en réalité, $e = 9,5 \times 10^{-5}$), de centre T , de rayon $r_0 = 7714$ km, soit une altitude $h = 1336$ km (juste au dessus de l'ionosphère). La masse du satellite Jason 2 est $m = 525$ kg.

Établir en fonction de G, M_T, m et r_0 , les expressions de :

- la norme de la vitesse orbitale du satellite v_0 ;
- la période de révolution T_0 ;
- son énergie mécanique E_m .

Calculer numériquement ces grandeurs pour le satellite Jason 2.

Exercice A – 4 Accélération radiale d'un satellite.

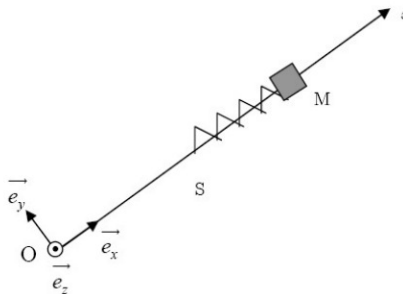
Extrait de CCP 2008 filière MP :

Un satellite, de masse m_s , de centre d'inertie S , est en orbite circulaire autour de la terre de centre O . Sa période est $T_0 = 12$ h. Dans ce satellite un point matériel M de masse $m = 100$ g peut se déplacer sans frottements sur un axe Sx , fixe dans le satellite (cf. figure suivante). En outre M est soumis à une force élastique qui dérive d'une énergie potentielle

$$E_p(x) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2$$

avec $\omega_1 = 0,03 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\vec{SM} = x \vec{e}_x$.

Rayon de la terre $R = 6400$ km ; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la terre.



On pose $r_o = OS$ et on désigne par $\mathcal{R}_S$ le référentiel lié au satellite muni du repère cartésien $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le référentiel $\mathcal{R}_g$ géocentrique est supposé galiléen.

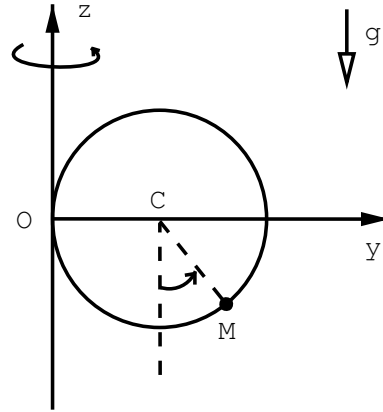
1. (a) Déterminer la vitesse v_o du satellite en fonction de r_o, g et R .
 (b) En déduire l'expression de T_0 en fonction de r_o, g et R . Calculer numériquement r_o, v_o et la vitesse angulaire ω_o du satellite dans $\mathcal{R}_g$.

2. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}_S$.
 - (a) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
 - (b) Donner une équation du mouvement approchée en considérant que $x \ll r_o$, en ne faisant intervenir que ω_o , ω_1 , x et ses dérivées temporelles.
 - (c) Montrer que M oscille et que sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.
 - (d) Pourquoi ce dispositif est-il pertinent pour mesurer, s'il y a lieu, l'accélération radiale du satellite ?

Exercice A – 5 Perle sur cerceau tournant

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur une circonférence de centre C et de rayon R , contenue dans un **plan vertical**. Par rapport au référentiel terrestre noté $\mathcal{R}$, supposé galiléen, ce cercle tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe **vertical tangent** à la circonférence.

La position du point M , dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au cercle est repérée par l'angle θ que fait $\overrightarrow{CM}$ avec la verticale descendante. On associe au référentiel $\mathcal{R}'$ le repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}')$.



1. Quelles sont les forces auxquelles est soumis le point M dans le référentiel lié au cercle ?
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}'$.
3. En déduire que l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme : $R\ddot{\theta} = f(\theta)$.
4. Donner l'expression des composantes de la réaction du cercle dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}')$.
5. Définir le moment cinétique du point M en C dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et donner son expression.
6. Exprimer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
7. En déduire l'équation du mouvement.
8. Exprimer l'énergie cinétique de M dans le référentiel lié à la circonférence.
9. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle. On prendra l'origine des énergies potentielles en $\theta = 0$.
10. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ .
11. Établir que l'équation donnant les positions d'équilibre du point M est :

$$R\omega^2(1 + \sin \theta) = g \tan \theta.$$

12. Montrer par un raisonnement graphique que cette équation admet deux solutions. On précisera l'intervalle auquel elles appartiennent.
13. On désire qu'une position d'équilibre existe pour $\theta = \pi/6$. Calculer la valeur de la vitesse de rotation correspondante (on prendra $R = 1 \text{ m}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-1}$).
14. Cette position d'équilibre est-elle stable ?