

A – Référentiels non galiléen

Exercice 1 Plan incliné accéléré

Exercice.

1] Système étudié = point matériel M.

• Référentiel lié au plan incliné en mouvement de translation uniformément accéléré par rapport à R galiléen -
Le référentiel d'étude n'est pas galiléen.

• Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g}$ le poids
- $\vec{R}$ = réaction normale au plan incliné (pas de frottement)
- $\vec{f}_{\text{int}} = -m\vec{a}_0$ force d'inertie d'entraînement
- $\vec{f}_{\text{ie}} = \vec{0}$ force d'inertie de Coriolis

D'après le principe fondamental de la dynamique projeté sur OX :

$$m \ddot{x} = -mg \sin \alpha + m a_0 \cos \alpha$$

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha + a_0 \cos \alpha$$

2] A $t=0$ $\dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = (-g \sin \alpha + a_0 \cos \alpha) t + 0$$

Le point remonte la pente $\Leftrightarrow \dot{x} \geq 0$

soi

$$a_0 > g \tan \alpha$$

Seconde version :

1] Système étudié : point matériel M

Référentiel lié au plan incliné non galiléen (translation uniformément accéléré / R galiléen)

Bilan des actions :

- * Poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- * Réaction du plan incliné $\vec{R} \perp$ au plan
- * Force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{\text{int}} = -m\vec{a}_0$
- * Force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{\text{ie}} = \vec{0}$ (translation).

D'après le principe fondamental de la dynamique dans R' non galiléen -

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{\text{ext}}$$

Sur OX :

$$m \ddot{x} = -mg \sin \alpha + 0 + m a_0 \cos \alpha$$

$$\ddot{x} = (a_0 \cos \alpha - g \sin \alpha)$$

2] $\dot{x} = (a_0 \cos \alpha - g \sin \alpha) t + cte.$

à $t=0$ $\dot{x} = 0 = cte.$

$$\dot{x}(t) = (a_0 \cos \alpha - g \sin \alpha) t = \frac{dx}{dt}$$

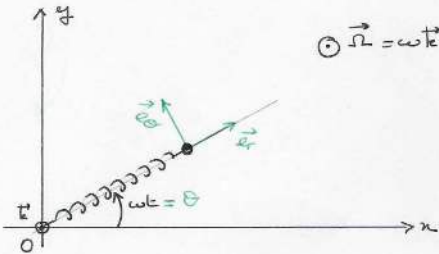
$$x(t) = (a_0 \cos \alpha - g \sin \alpha) \frac{t^2}{2} + cte.$$

à $t=0$ $x(0) = x_0 = cte$ $x(t) = (a_0 \cos \alpha - g \sin \alpha) \frac{t^2}{2} + x_0$

Le point remonte la pente si $a_0 \cos \alpha - g \sin \alpha > 0$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha < \frac{a_0}{g}$$

Exercice 2 Étude d'un ressort dans 2 référentiels

A. Étude d'un ressort dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire.B. Étude dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe


$\odot \vec{\Omega} = \omega \vec{k}$
 • Système : particule M
 • Référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen (rotation uniforme de $\mathcal{R}$ galiléen)
 • Forces : $\vec{P}$ poids, $\vec{R}$ réaction du plan, $\vec{T}$ tension du ressort

$\vec{F}_{\text{ient}}$ force d'inertie d'entraînement
 $\vec{F}_{ie}$ force d'inertie de Coriolis

1) Par définition $\vec{F}_{ie} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$
 $\vec{OH} = r\vec{e}_r$
 $\vec{v} = \frac{d\vec{OH}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r$
 $\vec{F}_{ie} = -2m\omega \vec{k} \wedge \dot{r}\vec{e}_r = -2m\omega \frac{dr}{dt} \vec{e}_\theta$
 $\vec{F}_{\text{ient}} = -m\vec{a}_{\text{ent}}$ mouvement d'entraînement = mouvement circulaire uniforme
 $\vec{a}_{\text{ent}} = -r\omega^2 \vec{e}_r$
 $\vec{F}_{\text{ient}} = +mr\omega^2 \vec{e}_r$

2) Soit δW_{ient} le travail élémentaire de la force d'inertie d'entraînement
 $\delta W_{\text{ient}} = \vec{F}_{\text{ient}} \cdot d\vec{OH} = mr\omega^2 dr = d\left[m\omega^2 \frac{r^2}{2}\right] = -dE_{p_{fie}}$
 $E_{p_{fie}} = -m\omega^2 \frac{r^2}{2} + \text{cte}$ on peut prendre $E_{p_{fie}} = 0$ pour $r = 0$

$$E_{p_{fie}}(r) = -m\omega^2 \frac{r^2}{2}$$

$$3) \delta W_{ie} = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{OH} = -2m\omega \frac{dr}{dt} \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = 0$$

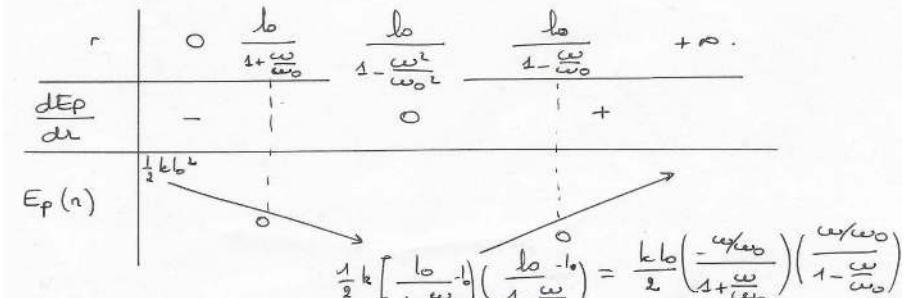
La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas.

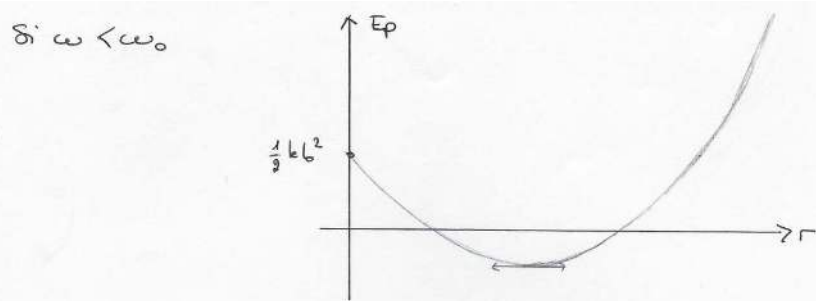
4) Soit E_p l'énergie potentielle totale

$$E_p = E_{p_T} + E_{p_{fie}} \quad (\text{l'énergie potentielle de pesanteur est une constante du mouvement et } \vec{R} \text{ ne travaille pas})$$

$$\begin{aligned}
 E_p(r) &= \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 - m\omega^2 \frac{r^2}{2} \\
 &= \frac{1}{2}k \left[(r-l_0)^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} r^2 \right] \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\
 &= \frac{1}{2}k \left(r-l_0 - \frac{\omega r}{\omega_0} \right) \left(r-l_0 + \frac{\omega r}{\omega_0} \right) \\
 &= \frac{1}{2}k \left[r \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) - l_0 \right] \left[r \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0} \right) - l_0 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_p}{dr} &= \frac{1}{2}k \left[2 \left(r-l_0 \right) - 2r \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right] = k \left[r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) - l_0 \right] \\
 &= 0 \quad \text{pour } r = \frac{l_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{si } \omega < \omega_0
 \end{aligned}$$





pour $\omega = \omega_0$

$$E_p(r) = \frac{1}{2}k(-b)(2r-b) = +\frac{k-b}{2}(b-2r)$$

$E_p(r)$ est une droite

pour $\omega > \omega_0$ $E_p(r)$ est une branche de parabole décroissante.

5. Equilibre correspond à un minimum d'énergie potentielle
Seulement pour $\omega < \omega_0$
 l_2 est tel que $\frac{dE_p}{dr}(l_2) = 0$

$$\text{soit } l_2 = \frac{b}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{b}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}$$

C'est un équilibre stable.

Le mouvement est alors circulaire uniforme.

6. $l_2 = l_1$.

Exercice 3 Le satellite océanographique Jason 2

1. $\vec{F} = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}_{TS}$ avec $r = TS$
force de gravitation. $\vec{u}_{TS} = \frac{\vec{TS}}{TS}$

2. a. Rq le référentiel géocentrique est le référentiel dans lequel T le centre de la Terre est fixe et.

Le référentiel n'est pas rigoureusement galiléen

→ Marées océaniques non expliquées

→ Mvt de translation quasi circulaire par rapport à R héliocentrique.

b. Dans le référentiel géocentrique galiléen, le satellite S n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre = force centrale conservative.

Conséquence :

Il y a conservation du moment cinétique du satellite calculé en T. En effet, d'après le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_T(S)}{dt} = \vec{\tau}_T(\vec{F}) = \vec{0}$$

$$\vec{L}_T(S) = \vec{TS} \wedge m \frac{d\vec{TS}}{dt} = \vec{cte}$$

$$r = \frac{J_T^2 / m}{GM_T m + R \cos \beta} = \frac{p}{1 + e \cos \beta}$$

avec $p = \frac{J_T^2}{GM_T m^2}$ et $e = \frac{R}{GM_T m}$

Si $e > 1$ 1 branche d'hyperbole
 $e = 1$ parabole
 $e < 1$ ellipse.

4) Trajectoire circulaire
 2^{ème} loi de Newton.

$$-m \frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r = -GM_T m \frac{1}{r_0^2} \vec{e}_r$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \quad v_0 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{7,714 \cdot 10^6}} = 7,15 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

T_0 est telle que $v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} = \frac{2\pi r_0}{T_0}$

$$T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_T}}$$

$$T_0 = \frac{4 \times 3,14^2 \times 7,7^3 \cdot 10^{18}}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}$$

$$T_0 = 6,7 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 52$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} = \frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0} = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r_0}$$

$$E_m = \frac{525 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 7,714 \cdot 10^6}$$

$$E_m = -1,36 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Exercice 4 Accélération radiale d'un satellite.

1) On étudie le mouvement du satellite S dans le référentiel géocentrique galiléen. Il est soumis à l'interaction gravitationnelle exercée par la terre $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -g \frac{M_T m_s}{r^2} \vec{e}_r$$

avec $g = G \frac{M_T}{R^2}$ soit $\vec{F} = -m_s g \frac{R^2}{r_0^2} \vec{e}_r$

puisque $r_0 = OS$.

a) Le mouvement du satellite étant circulaire on a

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r$$

D'après la 2^{ème} loi de Newton $m \vec{a} = \vec{F}$

$$\text{D'où} \quad -m_s \frac{v_0^2}{r_0} = -m_s g \frac{R^2}{r_0^2}$$

$$v_0 = \sqrt{g \frac{R^2}{r_0}}$$

b) Soit T_0 la période de révolution du satellite. Le mouvement du satellite étant uniforme, on a

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} \quad T_0 = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{g R^2}}$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{g R^2}}$$

Application numériques :

$$r_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{T_0^2 \cdot g \cdot R^2}{4\pi^2}}$$

$$T_0 = 12 \text{ h}$$

$$\omega_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1} \text{ vitesse angulaire}$$

$$r_0 = 27 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$v_0 = \sqrt{g \frac{R^2}{r_0}} = r_0 \omega_0 \quad v_0 = 3,9 \text{ km s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g R^2}{T_0^2}} \cdot 2\pi$$

2/ On étudie le mouvement de M dans le référentiel du satellite S non galiléen. Le référentiel R_S est en rotation circulaire uniforme par rapport à R_g galiléen.

M est soumis à :

* l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

$$\vec{F} = -g \frac{M_T m}{(r_0 + x)^2} \vec{e}_r$$

* l'action de l'axe $\vec{R} \perp \vec{a} \vec{e}_r$ (absence de frottement)

* $\vec{f}$ force élastique dérivant de $E_p(x)$

$$\vec{f} = -\text{grad } E_p(x) \quad \vec{f} = f(x) \vec{e}_r$$

$$f(x) dx = -dE_p$$

$$f(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -m\omega_1^2 x$$

* $\vec{f}_{\text{cent}}$ force d'inertie d'entraînement

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{cent}} &= -m\vec{a}_{\text{cent}} \\ &= -m(-\omega_0^2 (r_0 + x) \vec{e}_r) \\ &= m\omega_0^2 (r_0 + x) \vec{e}_r \end{aligned}$$

* $\vec{f}_{\text{ie}}$ force d'inertie de Coriolis

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{ie}} &= -m\vec{a}_e \\ &= -2m\omega_0 \vec{e}_3 \wedge \dot{x} \vec{e}_r \\ &= -2m\omega_0 \dot{x} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique on a :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{f}_{\text{cent}} + \vec{f}_{\text{ie}}$$

Selon $\vec{e}_r$: $m\ddot{x} = -\frac{gR^2m}{(r_0+x)^2} - m\omega_1^2 x + m\omega_0^2 (r_0+x)$

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)x + \frac{gR^2}{(r_0+x)^2} = \omega_0^2 r_0$$

b. $x \ll r_0$ $\frac{1}{(r_0+x)^2} = \frac{1}{r_0^2 (1 + \frac{x}{r_0})^2}$

$$= \frac{1}{r_0^2} \left[\left(1 - \frac{2x}{r_0} \right) + o\left(\frac{x}{r_0}\right) \right]$$

et $\frac{gR^2}{r_0^2} = \frac{v_0^2}{r_0} = \omega_0^2 r_0$

Equation du mouvement approchée :

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)x + r_0\omega_0^2 \left(1 - \frac{2x}{r_0} \right) = r_0\omega_0^2$$

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = 0$$

c. On a $\omega_1 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$ et $\omega_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1} \ll \omega_1$.
 $\omega_1^2 - 3\omega_0^2 > 0$ M oscille (équation différentielle d'un oscillateur harmonique)

ω_p = pulsation des oscillations

$$\omega_p = \sqrt{\omega_1^2 - 3\omega_0^2} = \omega_1 \left[1 - 3\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 \right]^{1/2}$$

avec $\frac{\omega_0}{\omega_1} \ll 1$.

$\omega_p \approx \omega_1$ la période de

évolution n'est pas affectée par la révolution du satellite

d. S'il existe une oscillation résiduelle du satellite alors

elle apparaît dans la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{\text{ient}} = m \omega_0^2 (r_0 + x) \vec{e}_r \approx a_r \vec{e}_r$$

⇒ modification de la position d'équilibre

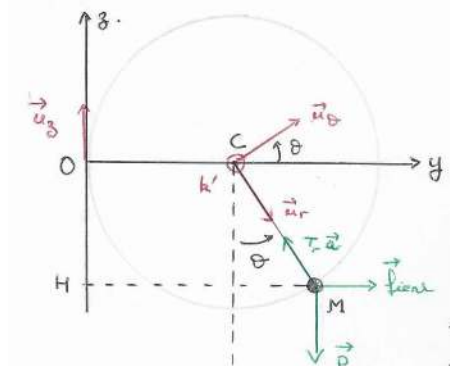
$$x'' + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = -a_r$$

$$x'' + \omega_p^2 x = \omega_p^2 x_{\text{eq}} \quad x_{\text{eq}} = \frac{-a_r}{\omega_p^2}$$

ou $a_r = -\omega_p^2 x_{\text{eq}}$.

Ce dispositif permet de mesurer l'accélération radiale du satellite.

Exercice 5 Perle sur cerceau tournant



1) Dans le référentiel R' non galiléen, M est soumis à :

* $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_3$ son poids

* $\vec{T}$ la réaction du cercle
 $\vec{T} = T_r \vec{u}_r + T_{\theta} \vec{u}_{\theta}$

$T_{\theta} = 0$ car pas de frottement.

* $\vec{f}_{\text{ient}}$ force d'inertie d'entraînement
 * $\vec{f}_c$ force d'inertie de Coriolis

on a $\vec{f}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_3 = \omega [-\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_{\theta}]$
 et $\vec{v} = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta}\vec{u}_{\theta}) = R\ddot{\theta}\vec{u}_{\theta}$

soit $\vec{f}_c = +2m\omega \cos\theta R\ddot{\theta} \vec{k}'$

et $\vec{f}_{\text{ient}} = -m\vec{a}_{\text{ent}} = -m\vec{a}(P/R)$

P = point coïncident. Il a un mouvement circulaire uniforme d'axe Oz dans R .

$$\vec{a}(P/R) = -\omega^2 \vec{HM} = -\omega^2 R(1 + \sin\theta) \vec{u}_\theta$$

avec $\vec{u}_\theta = \sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_3$

soit $\vec{f}_{\text{ient}} = m\omega^2 R(1 + \sin\theta)(\sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_3)$

2) D'après le principe fondamental de la dynamique dans R'

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{\text{ient}} + \vec{f}_c$$

avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

Par projection on obtient :

$$\begin{cases} -mR\ddot{\theta}^2 = mg \cos \theta + T_r + m\omega^2 R(1+\sin \theta) \sin \theta & (1) \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + m\omega^2 R(1+\sin \theta) \cos \theta & (2) \\ 0 = T_{k'} + 2m\omega R \cos \theta \dot{\theta} & (3) \end{cases}$$

3) Equation du mouvement donnée par (2)

$$R\ddot{\theta} = -g \sin \theta + R\omega^2 (1+\sin \theta) \cos \theta$$

4) Or a $T_r = -m [R\ddot{\theta}^2 + g \cos \theta + \omega^2 R(1+\sin \theta) \sin \theta]$

$$T_{k'} = -2mR\omega \cos \theta \dot{\theta}$$

5) $\vec{\mathcal{M}}_C(M) = \vec{CM} \wedge m\vec{v}$
 $= R\vec{u}_r \wedge mR\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mR^2\dot{\theta}\vec{k}'$

6) D'après le théorème du moment cinétique (TMC)

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}_C}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{\text{fiat}} + \vec{f}_e)$$

avec $\frac{d\vec{\mathcal{M}}_C}{dt} = mR^2\ddot{\theta}\vec{k}'$

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{P}) = \vec{CM} \wedge \vec{P} = R\vec{u}_r \wedge mg(\cos \theta \vec{u}_\theta - \sin \theta \vec{u}_\phi)$$

$$= -mgR \sin \theta \vec{k}'$$

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{T}) = \vec{0} - RT_{k'} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f}_{\text{fiat}}) = R\vec{u}_r \wedge m\omega^2 R(1+\sin \theta)[\sin \theta \vec{u}_\theta + \cos \theta \vec{u}_\phi]$$

$$= m\omega^2 R^2(1+\sin \theta) \cos \theta \vec{k}'$$

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f}_e) = -2m\omega R^2 \cos \theta \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

7) TMC sur $\vec{k}'$: $mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin \theta + m\omega^2 R^2(1+\sin \theta) \cos \theta$

8) $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$

9) $\vec{P} = -mg\vec{u}_3$

$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{CM} = \vec{P} \cdot R d\theta \vec{u}_\theta = -mgR \sin \theta d\theta = -dE_{pp}$$

soit $dE_{pp} = mgR \sin \theta d\theta$

$$E_{pp}(\theta) = -mgR \cos \theta + A$$

$$\delta W(\vec{f}_{\text{fiat}}) = \vec{f}_{\text{fiat}} \cdot d\vec{CM} = \vec{f}_{\text{fiat}} \cdot R d\theta \vec{u}_\theta = m\omega^2 R^2(1+\sin \theta) \cos \theta d\theta$$

$$= -dE_{\text{pent}}$$

$$dE_{\text{pent}} = -m\omega^2 R^2 (\cos \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta$$

$$E_{\text{pent}} = -m\omega^2 R^2 \left(\sin \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) + \text{cte.}$$

On veut $E_{pp}(\theta) = 0 = -mgR + A$ $E_{pp} = mgR(1 - \cos \theta)$

$$E_{\text{pent}}(0) = 0 = \text{cte.}$$

$E_{\text{pent}} = -m\omega^2 R^2 \sin \theta \left(1 + \frac{\sin \theta}{2} \right)$

10) $\vec{T}$ et $\vec{f}_e$ ne travaillent pas, $\vec{f}_{\text{fiat}}$ et $\vec{P}$ dérivent d'une énergie potentielle. Il y a conservation de l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pp} + E_{\text{pent}} = \text{cte.}$

Soit $\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos \theta) - m\omega^2 R^2 \sin \theta \left(1 + \frac{\sin \theta}{2} \right) = \text{cte.}$

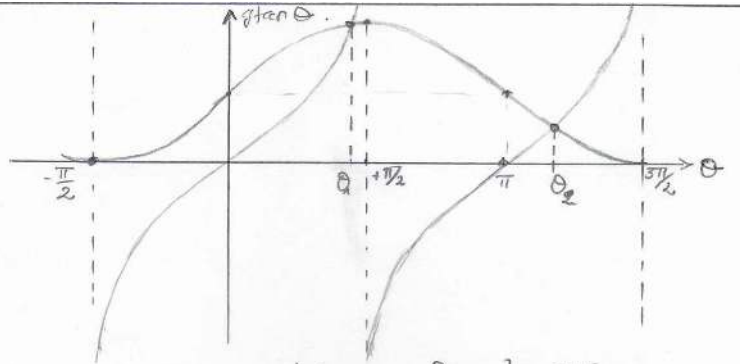
$$R\ddot{\theta} + g \sin \theta - \omega^2 R \cos \theta (1 + \sin \theta) = 0.$$

11) A l'équilibre $\sum \vec{f} = \vec{0}$ ou $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$

$$g \sin \theta = \omega^2 R \cos \theta (1 + \sin \theta)$$

$$g \tan \theta = R\omega^2 (1 + \sin \theta).$$

12) $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$



Cette équation admet deux solutions : $\theta_1 \in]0; \frac{\pi}{2}[$
 or $\theta_2 \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$

13) La position d'équilibre correspond à $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$. On a
 $g \tan \theta_1 = R \omega^2 (1 + \sin \theta_1)$.

$$\frac{g}{\sqrt{3}} = R \omega^2 \cdot \frac{3}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\omega = 1,96 \text{ sds}^{-1}$$

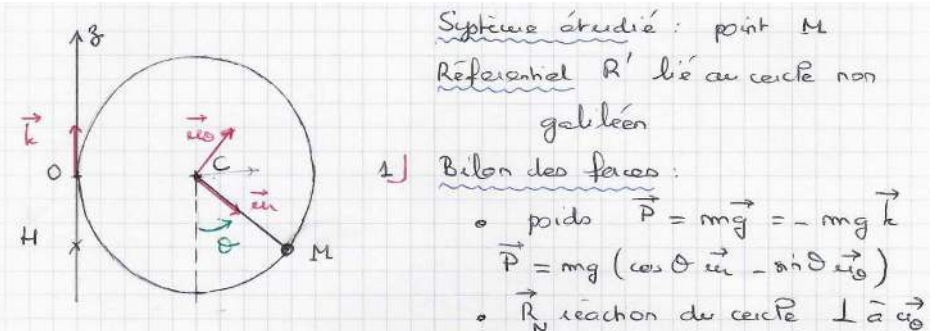
14) Pour savoir si cette position d'équilibre est stable, on calcule

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} :$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} &= +mgR \cos \theta - m\omega^2 R^2 (-\sin \theta + \cos^3 \theta - \sin^3 \theta) \\ &= mgR \cos \theta - m\omega^2 R^2 \left(1 - \sin \theta - 2\sin^2 \theta\right) \end{aligned}$$

$$\text{pour } \theta = \theta_1 = \frac{\pi}{6} \quad \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = \underbrace{mgR \frac{\sqrt{3}}{2}}_{>0} - \underbrace{m\omega^2 R^2 \left(1 - \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)}_0$$

θ_1 est une position d'équilibre stable.



Système étudié : point M

Référentiel R' lié au cercle non galiléen

1) Bilan des forces :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$
- $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$
- $\vec{R}_N$ réaction du cercle $\perp \vec{e}_\theta$

- force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{\text{ent}} = -m\vec{a}_{\text{ent}}$
 $\vec{F}_{\text{ent}} = -m\vec{a}(P/R)$ P = point coïncident qui a un mouvement de rotation uniforme autour de (O_3)
 $\vec{a}(P/R) = -\omega^2 \vec{HM}$

$$\|\vec{HM}\| = R(1 + \sin \theta)$$

$$\vec{F}_{\text{ent}} = m\omega^2 R(1 + \sin \theta)(\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$$

- force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{\text{ic}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$
 avec $\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \omega(-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$
 or $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ic}} &= -2m\omega(-\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \wedge R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &= +2m\omega R\dot{\theta} \cos \theta \vec{k}' \end{aligned}$$

2) D'après le principe fondamental de la dynamique dans R' : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{\text{ent}} + \vec{F}_{\text{ic}}$ (*)

3) On a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\ddot{\theta} \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$

En projetant (*) sur $\vec{e}_\theta$ on obtient :

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + 0 + m\omega^2 R(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

Soit $R\ddot{\theta} = f(\theta)$

avec $f(\theta) = -g \sin \theta + R\omega^2 (1 + \sin \theta) \cos \theta$

4] $\vec{R}_N = R_r \vec{u} + R_k \vec{k}'$ $R_\theta = 0$ car $\vec{R}_N \perp$ cercle.

PFD sur $\vec{u}$: $-mR\ddot{\theta} = mg \cos \theta + R_r + m\omega^2 R(1 + \sin \theta)$

$R_r = -[mR\ddot{\theta} + mg \cos \theta + m\omega^2 R(1 + \sin \theta)]$

sur $\vec{k}'$: $0 = R_k' + 2m\omega R\dot{\theta} \cos \theta$

$R_k' = -2m\omega R\dot{\theta} \cos \theta$

5] Par définition $\vec{L}_c(M) = \vec{CM} \wedge m\vec{v}$

$\vec{L}_c(M) = R\vec{u} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mR^2\dot{\theta}\vec{k}'$

6] D'après le théorème du moment cinétique (C est fixe dans R')

$$\frac{d\vec{L}_c(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_c(\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{\text{cent}} + \vec{f}_{\text{ie}})$$

$$= \vec{CM} \wedge \vec{P} + \underbrace{\vec{CM} \wedge \vec{R}_r \vec{u}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{CM} \wedge (R_k \vec{k}' + \vec{f}_{\text{ie}})}_{\vec{0}} + \vec{CM} \wedge \vec{f}_{\text{cent}}$$

7] $mR^2\ddot{\theta}\vec{k}' = -Rmg \sin \theta \vec{k}' + m\omega^2 R^2(1 + \sin \theta) \cos \theta \vec{k}'$

$R\ddot{\theta} = -g \sin \theta + \omega^2 R(1 + \sin \theta) \cos \theta$

8] $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$

9] $dE_p = -m\vec{g} \cdot d\vec{CM} = -m\vec{g} \cdot R d\theta \vec{u}_\theta$
 $= +mgR \sin \theta d\theta$ $\swarrow$ choix : $E_p(0) = 0$.

$E_p = -mgR \cos \theta + \text{cte} = mgR(1 - \cos \theta)$

$dE_{\text{pcent}} = -\vec{f}_{\text{cent}} \cdot d\vec{CM} = -m\omega^2 R^2(1 + \sin \theta) \cos \theta d\theta$

$E_{\text{pcent}} = m\omega^2 R^2 \left[-\sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right] + \text{cte.}$

$E_{\text{pcent}}(0) = \frac{m\omega^2 R^2}{2} + \text{cte.}$

$E_{\text{pcent}}(\theta) = m\omega^2 R^2 \left[-\sin \theta + \frac{\cos^2 \theta - 1}{2} \right]$

10] D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = dW(\vec{R}_N + \vec{P} + \vec{f}_{\text{cent}} + \vec{f}_{\text{ie}})$$

$$= -dE_p - dE_{\text{pcent}} + \underbrace{dW(\vec{R}_N)}_{\substack{0 \text{ car} \\ \vec{R}_N \perp d\vec{CM}}} + \underbrace{dW(\vec{f}_{\text{ie}})}_{0 \text{ car } \vec{f}_{\text{ie}} \perp \vec{v}}$$

$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_{\text{pcent}}}{dt} = \frac{dE_m}{dt} = 0$

$mR^2\ddot{\theta} + mgR \sin \theta - m\omega^2 R^2 \cos \theta = 0$
 $-m\omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta = 0$

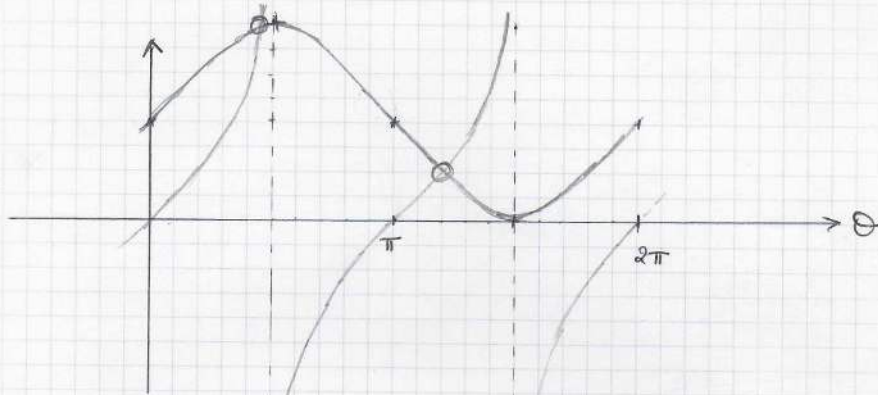
Soit $R\ddot{\theta} = -g \sin \theta + \omega^2 R \cos \theta (1 + \sin \theta)$

11] Les positions d'équilibre correspondent aux extrema d'énergie potentielle

$\frac{dE_p}{d\theta} + \frac{dE_{\text{pcent}}}{d\theta} = 0 = mgR \sin \theta - m\omega^2 R^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$

$\Rightarrow g \tan \theta = \omega^2 R(1 + \sin \theta)$

12] On trace sur un même graphe $g \tan \theta$ et $\omega^2 R (1 + \sin \theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$



Deux points d'intersection $\rightarrow$ 2 positions d'équilibre
 $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

13] On veut $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{2}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

soit $g \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \omega^2 R \cdot \frac{3}{2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}}} \quad \omega = 1,96 \text{ rad.s}^{-1}$$

14.] $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mR [+g \cos \theta + \omega^2 R \sin \theta - \omega^2 R \cos 2\theta]$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_1) = mR \left[+g \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{g}{3/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= +mgR \frac{\sqrt{3}}{2} > 0. \quad \text{Position d'équilibre stable.}$$