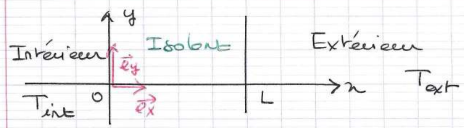
56. $\boxed{\text{Le Kairlin}}$

## Etude des performances thermiques

### 1. Etude analytique du régime permanent




Q1 Modélisation unidimensionnelle
Les dimensions latérales de la paroi sont grandes devant L. On néglige des effets de bord.

01 Q2 Equation de diffusion thermique

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = + \lambda_{isolant} \Delta T \iff \boxed{\Delta T = \frac{\rho c_p}{\lambda_{isolant}} \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Modélisation unidimensionnelle : $T(x,t)$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c_p}{\lambda_{isolant}} \frac{\partial T}{\partial t}}$$

04 Q3 Conditions aux limites : $T(t>0, x=0) = T_{int}$
$T(t>0, x=L) = T_{ext}$

Conditions initiales $T(t=0, x=0) = T_{int}$
$T(t=0, x>0) = T_{ext}$

06 Q4 En régime permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$
T ne dépend que de x

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \text{ soit } T(x) = Ax + B$$

avec $T(0) = T_{int} = B$

$$T(L) = T_{ext} = AL + T_{int}$$

$$\boxed{T(x) = \frac{T_{ext} - T_{int}}{L} x + T_{int}}$$

08. Q5 $R_{th} = \left( \frac{\Phi_{th\, 1\to 2}}{T_1 - T_2} \right)^{-1}$ = Rapport entre l'écart de température et flux thermique

avec $\Phi_{th\, 1\to 2} = \vec{j}_{th\, 1\to 2} \cdot \vec{S}$ ← flux thermique de 1 vers 2

et $\vec{j}_{th} = -\lambda_{isolant} \overrightarrow{grad}\, T$ loi de Fourier

$$\text{D'où } R_{th} = \left( \frac{-\lambda_{isolant}\, dT/dx \cdot S}{T_{int} - T_{ext}} \right)^{-1}$$

avec $\frac{dT}{dx} = A = \frac{T_{ext} - T_{int}}{L}$

On en déduit $\boxed{R_{th} = L/\lambda_{isolant} S}$

Résistance thermique surfacique $r_{th} = \frac{R_{th}}{S}$

$\rightarrow r_{th} = \frac{L}{\lambda_{isolant} S^2}$ ne correspond pas au sujet.

Si on prend $r_{th} = R_{th} \times S$

alors $\boxed{r_{th} = \dfrac{L}{\lambda_{isolant}}}$

16 **Q6** $L = r_{th} \times \lambda_{isolant}$ unité $r_{th}$ ok avec $R_{th} \times S$.

$L = 12$ cm

17 **2 Etude numérique du régime transitoire**

**Q7** Par identification $\boxed{k_{th} = \dfrac{\lambda_{isolant}}{\rho c_p}}$

19 **Q8** $N_x$ = nombre d'intervalles spatiaux

$$\boxed{dx = \frac{L}{N\_x}}$$

On a $x_i = i\,dx$

20 **Q9** a) $T(t+dt,x) = T(t,x) + \dfrac{\partial T}{\partial t}(t,x)\,dt + o(dt)$

b) $$T(t,x-dx) = T(t,x) - \frac{\partial T}{\partial x}(t,x)\,dx + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x)\,\frac{dx^2}{2} + o(dx^2)$$

c) $$T(t,x+dx) = T(t,x) + \frac{\partial T}{\partial x}(t,x)\,dx + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x)\,\frac{dx^2}{2} + o(dx^2)$$

23 **Q10** On a

$$T(t,x+dx) + T(t,x-dx) = 2T(x,t) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx^2 + o(dx^2)$$

D'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x) = \frac{1}{dx^2}\Big[T(t,x+dx) + T(t,x-dx) - 2T(t,x)\Big]}$$

26 **Q11** a) On a

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\partial T}{\partial t}(t,x)\,dt$$

b) $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x) = \frac{1}{dx^2}\left[T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n\right]$$

28 **Q12** On a alors

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt} = k_{th}\,\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{dx^2}$$

Soit

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{k_{th}\,dt}{dx^2}\left(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n\right)$$ ok

**Q13** k = Lambda / Cp / RHo

**Q14** (2) est valable sur $[1, N_x - 1]$

**Q15** Instruction 2.1 : dx = L / N_x

Instruction 2.2 : dt = t_max / N_t

Q16 | 2.1 : Temp [0, 0] = T_int

3.2 : Temp [0, i] = T_ext

3.3. Temp [n, 0] = T_int

3.4. Temp [n, N_x] = T_ext

36 Q17

```
for n in range (1, N_t)
    for i in range (1, N_x)
        Temp [n+1, i] = Temp [n, i]
            + k*dt/dx/dx*(Temp [n, i+1]
            + Temp [n, i-1] - 2*Temp [n, i])
```

39 Q18

$t = 0 \leftrightarrow 3$

$t = 6000\,s \leftrightarrow 1$

$t = 12000\,s \leftrightarrow 4$

$t = 18000\,s \leftrightarrow 2$

41 Q19 à $t = 18\,000\,s$ le régime permanent est atteint puisque les points sont alignés.

(1)

15 III Etude des performances acoustiques

1. Modélisation de la propagation des ondes

Q20 Equation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

avec $\rho = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ et $\vec{v}(x,t) = \vec{v}_1(x,t)$

Linéarisation :

$$\boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0} \ *$$

18 Q21 On a, par définition $\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$

ou $\chi_s = +\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \rightarrow \boxed{\rho_0 \chi_s P_1 = \rho_1} \ **$

Q22 Equation d'Euler : $\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}}_{\text{ordre } 2}\right) = -\overrightarrow{grad}\, P$

Linéarisation $\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, P_1} \ ***$

Q23 Dans le cas d'une propagation unidimensionnelle selon $x$ :

$$\left.\begin{array}{l} * \rightarrow \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \\ ** \rightarrow \rho_1 = \rho_0 \chi_s P_1 \end{array}\right\} \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

$$*** \rightarrow \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

$$\cancel{\text{D'où } \frac{\partial^2 P_1}{\partial t \partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x}}$$

2

24

$$\left.\begin{aligned} \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

or $p = \underbrace{p_0}_{\text{cste}} + p_1$ d'où $\boxed{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}}$

avec $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}$

Q24 $[\rho_0 c] = M L^{-3} L T^{-1} = M L^{-2} T^{-1}$

$$\frac{[\text{pression}]}{[\text{vitesse}]} = \frac{M L T^{-2} . L^{-2}}{L T^{-1}} = M L^{-2} T^{-1}$$

même dimension donc même unité.

28 Q25 On a $v_1(x,t) = +\frac{1}{Z} f\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{1}{Z} g\left(t + \frac{x}{c}\right)$

30/52

## 2. Réflexion et transmission des ondes

$p_1(x,t) = p_1 \cos(\omega t - kx)$

Q26 Onde réfléchie : $p_r(x,t) = p_{r0} \cos(\omega t + kx + \varphi_r)$

$v_r(x,t) = -\frac{p_{r0}}{Z} \cos(\omega t + kx + \varphi_r)$

Onde transmise $p_t(x,t) = p_{t0} \cos(\omega t - kx + \varphi_t)$

$v_t(x,t) = \frac{p_{t0}}{Z} \cos(\omega t - kx + \varphi_t)$

Q27 a) Continuité de $v$ en $x = 0$ :

$v_1(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)$

En notation complexe, avec l'impédance $Z$

$$\boxed{\frac{\underline{p}_1}{Z} - \frac{\underline{p}_r}{Z} = \frac{\underline{p}_t}{Z}}$$

3

b) Pour 1 élément de surface $dS$.

$\mu\, dS \frac{\partial v_t}{\partial t} = (p_1 + p_r - p_t)\, dS$

Soit $\mu i\omega \underline{v}_t = \underline{p}_1 + \underline{p}_r - \underline{p}_t$

c) On a $\begin{cases} 1 - r = t \\ \mu i\omega . \frac{1}{Z} t = 1 + r - t \end{cases}$

$r = 1 - t$ et $t\left(\frac{\mu i\omega}{Z} + 1\right) = 2 - t$

$\Leftrightarrow t\left(\frac{\mu i\omega}{Z} + 2\right) = 2$ $\boxed{t = \dfrac{2Z}{2Z + \mu i\omega}}$

et $\boxed{r = \dfrac{\mu i\omega}{2Z + \mu i\omega}}$ ok

04 Q28 $T_{\text{énergie}} = \dfrac{\langle p_t v_t \rangle}{\langle p_i v_i \rangle}$

$$= \frac{Re(\underline{p}_t \underline{v}_t^*)}{Re(\underline{p}_i \underline{v}_i^*)} = Re(\underline{t} . t^*)$$

$$T_{\text{énergie}} = \frac{4Z^2}{4Z^2 + \mu^2\omega^2}$$

$$T_{\text{énergie dB}} = 10 \log \frac{4Z^2}{4Z^2 + \mu^2\omega^2}$$

05 Q29 Instruction 1.1.