Mécanique du point
et du solide

I Rapports

CCINP 2022 et 2023

Le réflexe chez la plupart des candidats est de commencer par écrire systématiquement une relation fondamentale de la dynamique. L'emploi d'un théorème énergétique permet, dans certains cas, d'aboutir bien plus rapidement à un résultat qu'avec l'utilisation de la deuxième loi de Newton (cas des problèmes à un degré de liberté par exemple). Cette possibilité doit être considérée par les candidats.

Les candidats rencontrent très souvent des difficultés pour exprimer correctement les forces d'inertie dans un référentiel non galiléen.

CCINP 2021

La résolution d'un problème de mécanique ne peut pas débuter par l'énoncé d'une loi. Il est nécessaire de préciser au moins le système considéré, le référentiel d'étude, le repère, les forces en présence.
Le réflexe chez la plupart des candidats est de commencer par écrire systématiquement une relation fondamentale de la dynamique. L'emploi d'un théorème énergétique permet, dans certains cas, d'aboutir bien plus rapidement à un résultat qu'avec l'utilisation de la deuxième loi de Newton (cas des problèmes à un degré de liberté par exemple). Cette possibilité doit être considérée par les candidats.
Les candidats rencontrent très souvent des difficultés pour exprimer correctement les forces d'inertie dans un référentiel non galiléen.

Mines-ponts 2023

À l'instar de la thermodynamique, il est impératif de définir le système étudié. Il est également nécessaire de préciser le référentiel d'étude et les actions mécaniques en jeu. En particulier, la distinction entre référentiel galiléen et non-galiléen n'est pas toujours claire ce qui rend absconse l'utilisation des forces inertielles.
La vitesse de libération est souvent mal comprise et calculée par les candidats.

Mines-ponts 2022

La résolution d'un problème de mécanique ne peut pas immédiatement démarrer par l'énoncé d'une loi : il est nécessaire de préciser préalablement le système considéré, le référentiel d'étude, puis éventuellement le repère et les actions mécaniques en présence. La réaction du support est parfois oubliée par les candidats.

Les problèmes de mécanique se prêtent particulièrement bien à une discussion physique préliminaire qui, en plus de présenter les phénomènes en jeu, permet de dégager la meilleure stratégie de résolution, et de faire des tests de pertinence des résultats obtenus. Le jury recommande aux candidats d'en faire bon usage.

Les erreurs dans les calculs vectoriels (produits vectoriels, produits scalaires et projections) sont fréquents et pourraient être détectées à condition d'utiliser les critères de pertinence usuels ainsi que les cas angulaires limites.

L'appellation « base polaire » fait usuellement référence à la restriction d'une base cylindrique dans un plan de cote z constante, et non à une base dont l'origine se situe à l'un des pôles terrestres.

Dans cette même base, des manipulations pourtant assez fréquentes comme le passage du vecteur vitesse à sa norme, conduisent parfois à des erreurs.

L'emploi d'un théorème énergétique permet dans certains cas d'aboutir bien plus rapidement à un résultat (situations à un degré de liberté par exemple). Cette possibilité doit être considérée par les candidats.

La notion d'énergie potentielle effective et son exploitation pour les mouvements dans un champ gravitationnel est souvent mal maîtrisée. Le critère relatif au signe de l'énergie mécanique permettant de distinguer les différents types de trajectoires (ouvertes ou fermées) n'est pas toujours connu, de même que l'expression de l'énergie mécanique d'un objet en trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe. Un satellite en orbite circulaire qu'on freine et qu'on laisse ensuite évoluer librement, loin de toute atmosphère, adopte pour de nombreux candidats une trajectoire en forme de « 6 » qui n'est pas une conique : c'est impossible.

Dans les référentiels non-galiléens, la distinction entre le champ de pesanteur et le champ gravitationnel n'est pas connue de tous les candidats. L'action des forces d'inertie dans les expériences du quotidien pose aussi régulièrement problème. Le jury rappelle que ce type de situation se prête particulièrement bien à des estimations d'ordre de grandeur.

Dans le cas d'un mouvement pendulaire, l'approximation des petits angles est parfois utilisée sans vérification au préalable que les conditions sont bien réunies. Peu d'étudiants ont compris le lien entre l'apparition d'une non-linéarité et la perte d'isochronisme.

Centrale-Supélec 2022

Les sujets de mécanique sont problématiques pour un grand nombre de candidats généralement en raison d'un manque de rigueur (vecteur/scalaire, schémas, définitions du système et du référentiel, dérivées, intégrales, conditions aux limites, bases de projections, représentations 3D ou en coupe...) et de méthode. Le simple calcul d'une accélération ou d'un moment cinétique prend parfois beaucoup de temps. Le moment d'une force est souvent incompris. Le théorème du moment cinétique a été très fréquemment maltraité : vectoriellement, il est posé sans justification ni point bien défini et le plus souvent sans légitimité ; en projection (ce qui suffit le plus souvent), son application est généralement très problématique. Le moment cinétique en un point n'est pas toujours colinéaire au vecteur rotation. Contrairement à ce que certains pensent, un théorème s'applique dans un cadre strict qu'il convient obligatoirement de préciser. Il vaut mieux éviter d'appeler PFD ou RFD le théorème de la résultante cinétique pour un solide (en rotation par exemple) car cela donne lieu à des confusions irrattrapables du style « accélération du solide ». Pour les mouvements à force centrale, l'exposé ne dépasse pas souvent l'exposé plutôt maitrisé des concepts de base. La mécanique en référentiel non galiléen a été souvent problématique par une réelle méconnaissance des points de cours.

Centrale-Supélec 2021

On ne peut débuter une étude mécanique sans préciser ni le système, ni le référentiel d'étude (et donc son caractère galiléen ou non). Il convient également de manifester rigueur et exhaustivité dans le dénombrement des actions qui interviennent. La notion de moment en un point est également problématique pour certains candidats, l'utilisation du produit vectoriel n'est pas maitrisée, de même que la notion de bras de levier. Dans le cas où la force élémentaire n'est pas uniforme, il convient de savoir revenir à la définition intégrale.

Les exercices de mécanique posent des problèmes à bon nombre de candidats en raison d'un manque de rigueur (vecteur/scalaire, schémas, définitions du système et du référentiel, dérivées, intégrales, conditions aux limites, bases de projections, représentations 3D ou en coupe...) et de méthode. Il y a moyen d'améliorer le niveau des performances en s'exerçant sur des cas simples.

Le moment d'une force est parfois incompris.

Appeler PFD ou RFD le théorème de la résultante cinétique pour un solide (en rotation par exemple) donne lieu à des problèmes insolubles : on écrit ainsi « l'accélération du solide », « la force d'inertie en un point »sans se soucier le moins du monde du centre de masse.

II Questions de cours

- Notions de référentiel, galiléen, non galiléen ; illustrations.
- Théorème de Gauss gravitationnel.
- Théorème du moment cinétique. Application au pendule simple.
- États liés et de diffusion.
- Interaction gravitationnelle entre deux corps. Énergie potentielle effective. Influence de l'énergie sur les trajectoires
- Lois de Kepler (démonstrations dans le cas circulaire)
- Vitesse sur orbite basse. Vitesse de libération.
- Caractère non galiléen du référentiel terrestre.
- Solide en rotation autour d'un axe fixe. Moment d'inertie, TMC et TEC.

III Exercices

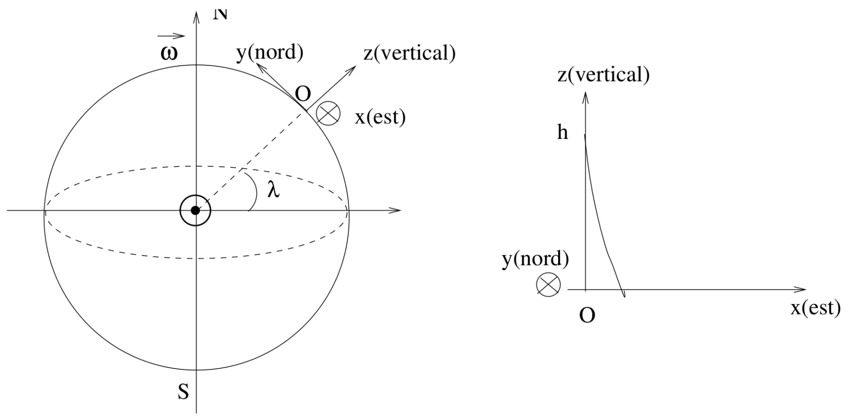
1. Pendule simple – CCINP

Une masse ponctuelle m est accrochée au bout d'un fil de longueur ℓ dont on néglige la masse. Avant l'instant t_0 le pendule est au repos, à l'instant t_0 on donne à la masse une vitesse V_0 horizontale. On note θ l'angle formé entre le fil et la verticale descendante.

1. Donner qualitativement les différents mouvements possibles pour la masse.
2. Exprimer la tension du fil à un instant t quelconque en fonction de θ.
3. Quelle vitesse initiale minimale doit-on donner à la masse pour que le fil soit toujours tendu ?

2. Déviation vers l'est – CCINP

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel de masse m d'une altitude h dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude λ à la surface de la Terre. Les frottements seront négligés.



1. En négligeant l'aspect non galiléen du référentiel terrestre, déterminer les expressions de $x(t)$ et $z(t)$, ainsi que le temps de chute. Faire l'application numérique pour $h = 150$ m.
2. Le référentiel terrestre n'est pas réellement galiléen. Pourquoi ? Déterminer l'expression de la force de Coriolis et montrer que cette force ne peut que légèrement perturber la trajectoire. Quelle composante de la trajectoire va-t-elle être principalement modifier ?
3. Déterminer alors l'équation différentielle approchée vérifiée par $x(t)$. Intégrer cette équation et en déduire la position du point de chute.

3. Satellite – CCINP

On considère un satellite qui orbite autour de la Terre. Il suit une trajectoire elliptique de grand axe $2a$. Le rayon de la Terre est R. Au périgée, le satellite se trouve à l'altitude h de la Terre.
On rappelle que l'énergie mécanique pour un mouvement elliptique est celle du mouvement circulaire si on remplace R par a.

1. Déterminer l'altitude du satellite à l'apogée.
2. Trouver une expression de la période T en fonction de G, M, R et a.
3. Déterminer les vitesses du satellite à l'apogée et au périgée.
4. Trouver une condition sur la vitesse et la position du satellite pour le faire passer sur une trajectoire circulaire.

4. Pendule conique – CCINP

Un pendule simple (masse m, longueur ℓ) est en rotation à vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical.
On impose $\omega = \omega_0$; déterminer la valeur θ_0 correspondant à un équilibre stable. À quelle condition sur ω la solution $\theta_0 \neq 0$ existe-t-elle ?

5. Comète solaire – CCINP ou Centrale

CCINP : Une comète a un périhélie de $r_p = r_0/2$ où r_0 est la distance Terre-soleil. En P la vitesse vaut $v_P = 2v_0$ où v_0 est la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil (supposée circulaire).

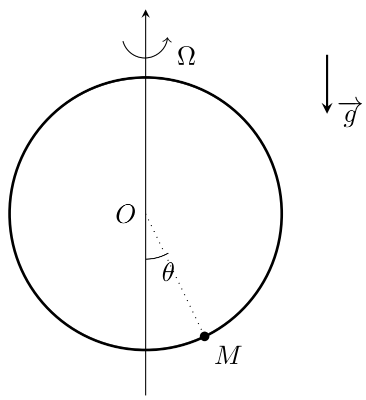
1. Quelle est la nature de la trajectoire ?
2. Déterminer $v(r)$.

Centrale : On considère une orbite terrestre de rayon R_0 ; on note M_0 la masse de la Terre et M_S celle du soleil.

1. Calculer la vitesse V_0 de la Terre, son énergie cinétique, mécanique et son moment cinétique.
2. Une comète de masse m_c coupe l'orbite terrestre en A et B ; son point le plus proche du Soleil est à $R_0/2$ et sa vitesse en ce point est $2V_0$. Donner la nature de sa trajectoire. Montrer que AB est un diamètre de l'orbite terrestre.

6. Anneau sur cerceau tournant – Centrale, Navale

Un anneau de masse m glisse sans frottement sur un cercle de rayon R en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire Ω.

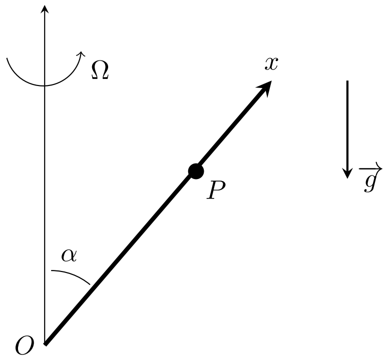


1. Déterminer les positions d'équilibre.
2. Discuter la stabilité et déterminer la période des petites oscillations autour des positions stables.

7. Tige tournante – CCINP, MT

Une tige faisant un angle α constant avec la verticale ascendante tourne autour de cette dernière à la vitesse angulaire constante Ω. Une perle P de masse m peut glisser sans frottement sur cette tige.

1. Trouver, dans le référentiel lié à la tige, la position d'équilibre x_{eq}.
2. On pose $x(t) = x_{eq} + X(t)$. Déterminer l'expression de $X(t)$.
3. Est-ce une position d'équilibre stable ou instable ?



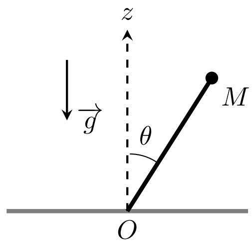
8. Bille dans bol – Mines

Dans tout le problème, on utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe polaire Oz, dirigé suivant la verticale ascendante. Le champ de pesanteur terrestre est uniforme $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ $(g > 0)$.
On étudie le mouvement d'un solide, assimilé à un point matériel M de masse m.
Ce solide se meut sur la surface intérieure d'un paraboloïde de révolution d'axe Oz, d'équation $r^2 - az = 0$ $(a > 0)$. Le solide est soumis à la réaction du support ; on néglige tous les frottements.

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que $C = f(r, \dot{\theta})$.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique sous la forme :
$$E_m = \frac{1}{2}\dot{r}^2 G(r) + E_{p,eff}(r).$$
Faire une étude graphique appropriée. Commenter.
3. Quelle est la période propre d'oscillation autour de l'équilibre ?

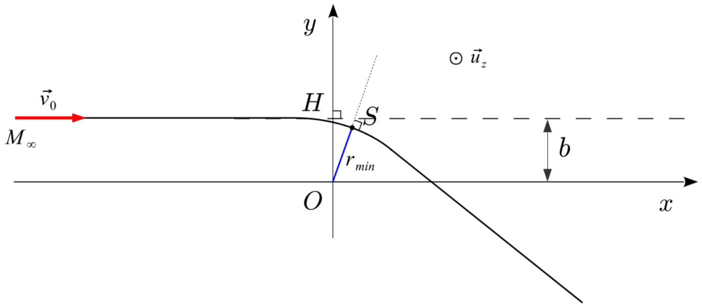
9. Couple de rappel – CCINP

Au bout d'une tige de masse nulle fixée en O, de longueur ℓ, faisant un angle θ avec la verticale, on attache une masse m. La tige subit un moment de rappel $-C\theta$.
À quelle condition la tige, écartée de sa position d'équilibre vertical, y retourne-t-elle ? Trouver alors la période des petites oscillations.



10. Météore – CCINP

Un météore, assimilable à un point matériel M de masse m négligeable devant la masse M_T de la Terre, arrive d'une distance $d = 100 \cdot 10^3$ km avec la vitesse $\vec{v}_0$ par rapport à la Terre (trajectoire rectiligne). Son paramètre d'impact est $OH = b$, où O correspond au centre de la Terre. On note S le point de la trajectoire le plus proche du centre de la Terre.

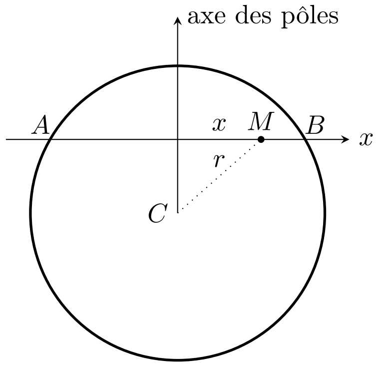


1. Quelles sont les deux grandeurs physiques conservées au cours du mouvement ?
2. Soit $\overrightarrow{\sigma}_0$ le moment cinétique par rapport à O du point M.
   (a) Donner l'expression de $\overrightarrow{\sigma}_O$ lorsque M est à l'infini ($M = M_\infty$) en fonction de m, v_0, b et $\overrightarrow{u_z}$.
   (b) On note v_S la norme de la vitesse de M lorsqu'il passe au plus près de la Terre ($M = S$). Donner l'expression de $\overrightarrow{\sigma}_O$ lorsque M est en S en fonction de m, v_S, r_{min} et $\overrightarrow{u_z}$.
3. En utilisant la conservation des grandeurs données au 1), exprimer la distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0, b, M_T, $\mathscr{G}$ constante de gravitation. À quelle condition le météore évitera-t-il l'impact avec la Terre ?
4. Dans le cas où $b > b_{min}$, déterminer l'angle de déviation φ du météorite.
5. On donne $v_0 = 11$ km.s^{-1}, $M = 5,98.10^{24}$ kg, $\mathscr{G} = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}, $R = 6400$ km. Calculer b_{min}. Calculer φ pour $b = 1,5.b_{min}$.

11. Train dans un tunnel – MT

Un train peut voyager dans un tunnel creuser à travers la Terre sans frottements et sans moteur. On considère la Terre homogène de masse M_T et de rayon R_T.

Données : $R_T = 6400$ km, $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}.



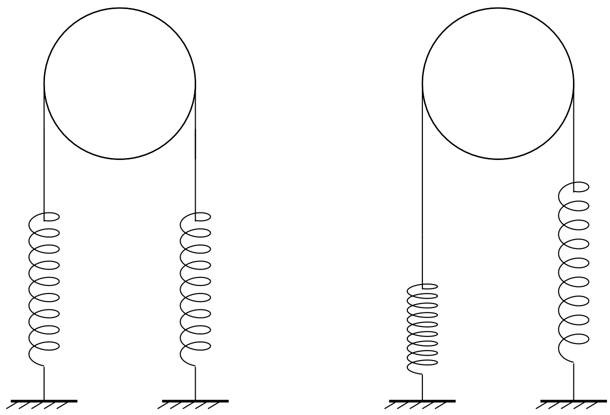
1. Déterminer le champ de gravitation dans tout l'espace, calculez-le à la surface de la Terre.
2. Le train peut-il aller de la ville A à la ville B ? En combien de temps ?

12. Métronome – CCINP

On étudie un métronome. Il est modélisé par une tige AC qui tourne autour de l'axe (Oz) horizontal. La liaison pivot est supposée parfaite et la tige AC est de masse négligeable.
En C, on considère une boule de masse M et de rayon R, la distance OC est notée ℓ et le moment d'inertie est $J_{Oz} = Mb^2$ (avec $b^2 = \ell^2 + \frac{2}{5}R^2$).
En A, on considère une masse ponctuelle de masse m, la distance AO est notée X. On a $m < M$, $X > \ell$ mais $mX < M\ell$.

1. Déterminer le moment cinétique du métronome par rapport à l'axe (Oz).
2. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, déterminer la période T des oscillations.
3. Retrouver la période d'un pendule simple.
4. Déterminer l'énergie cinétique $\mathscr{E}_c$ du métronome en fonction de $\frac{d\theta}{dt}$.
5. Déterminer l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p$ du métronome sachant que l'on prend $\mathscr{E}_p = 0$ quand $\theta = \frac{\pi}{2}$.
6. Retrouver la période des oscillations par une méthode énergétique.

13. Mesure de couple



Autour d'un cylindre horizontal d'axe fixe et de rayon $a = 10$ cm, on enroule une corde souple et de masse négligeable, tendue au moyen de deux ressorts de même raideur $k = 10^3$ N.m^{-1}, qui restent tendus et verticaux, fixés au sol. Lorsque l'ensemble est au repos (à gauche), les deux ressorts sont de même longueur.

Le coefficient de frottement de la corde sur le cylindre est $f = 0,30$.

On exerce alors, au moyen d'un moteur électrique, un couple moteur de moment M sur l'axe du cylindre. Lorsque celui-ci est mis en rotation à vitesse constante (2 400 tours par minute), on observe qu'un des ressorts s'allonge de $\ell_1 = 5$ cm, l'autre est raccourci de $\ell_2 = 2$ cm.

1. On appelle $F(\theta)$ la force de tension de la corde en un point de celle-ci repérée par l'angle $\theta(0 < \theta < \pi)$ le long de la partie enroulée de la corde. Montrer que :

$$\left|\frac{dF}{F}\right| = f d\theta$$

2. Calculer les tensions dans les deux brins verticaux.

3. Calculer M. Préciser dans quel sens ce couple est exercé.

4. Quelle est la puissance P fournie par le moteur électrique ? Quelle partie de cette puissance est dissipée par les frottements de la corde sur le cylindre ?