

## 1. Détermination de l'enthalpie de fusion de la glace – MT

$$\Sigma'_1: \text{eau 1 + calorimétrie } T_1 = 80^\circ\text{C}$$

$$m_1 = \rho_{\text{eau}} \times V_1 + \mu$$

$$= 98 \text{ g} \cdot 138$$

$$\text{eau 2 } T_2 = -20^\circ\text{C} \quad m = 26 \text{ g}$$

$$\Sigma'_{if} \quad T_f = 39^\circ\text{C}$$

Calorimétrie  $\Delta H = 0$ 

$$\Delta H = m_2 c_l (T_f - T_1) + m c_g (T_0 - T_2)$$

$$+ m \Delta_{\text{fus}} h + m c_l (T_f - T_0)$$

$$\text{Soit } \Delta_{\text{fus}} h = \frac{m_1}{m} c_l (T_f - T_1) + c_g (T_2 - T_0)$$

$$537 \quad + c_l (T_0 - T_f) \quad -42$$

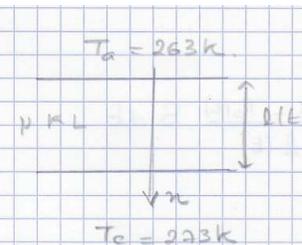
$$-163$$

$$\text{avec } T_0 = 0^\circ\text{C}$$

$$c_l = 4,18 \text{ J g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 4,18 \text{ kJ kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\Delta_{\text{fus}} h = 334 \text{ kJ kg}^{-1}$$

## 2. Lac gelé – Centrale



$$P_h = \alpha (T_0(t) - T_a) S$$

$$T_0(t) = T(0, t)$$

1.  $\Sigma'_i$  = tranche de glace entre  $n$  et  $n+dn$ .

1<sup>er</sup> principe  $dH = \delta Q$ .

$$\rho g S dn (T(n, t+dt) - T(n, t)) = (\Phi(n) - \Phi(n+dn)) dt$$

$$\rho S g \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{avec } \Phi = j(n, t) S$$

$$\text{loi de Fourier } \vec{j} = -\kappa \text{ grad } T$$

$$= -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \vec{u}_n$$

$$\text{Soit } \rho S g \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial n^2}$$

$$\text{Pour } c_g \text{ négligeable } \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = 0$$

$$T(n, t) = An + B$$

$$\text{avec } T(0, t) = T_0(t) = B$$

$$T(l(t), t) = T_e = Al(t) + T_0(t)$$

$$T(n, t) = (T_e - T_0(t)) \frac{n}{l(t)} + T_0(t)$$

$$\vec{j}(n, t) = -\kappa \text{ grad } T = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \vec{u}_n$$

$$= -\kappa A(t) \vec{u}_n$$

$$= -\kappa \frac{T_e - T_0(t)}{l(t)} \vec{u}_n$$

$$\Phi(t) = -\kappa \frac{T_e - T_0(t)}{l(t)} S$$

2.  $\Sigma =$  eau liquide entre  $l(t)$  et  $l(t) + dn$   
entre  $t$  et  $t + dt$

$$dH = \Phi(t) S dt$$

$$\text{avec } dH = \rho S dn L = -k \frac{T_e - T_0(t)}{l(t)} S dt$$

$$\text{Avec } dn = l(t+dt) - l(t) \\ = \frac{dl}{dt} dt$$

$$\text{Soit } L \rho \frac{dl}{dt} = +k \frac{T_e - T_0(t)}{l(t)} \Leftrightarrow l \frac{dl}{dt} = \frac{k}{\rho L} (T_e - T_0(t))$$

$$\text{Et } +k \frac{T_e - T_0(t)}{l(t)} = +\alpha (T_0(t) - T_a)$$

Continuité du flux.

$$T_0(t) = T_a + \frac{k}{\alpha} \frac{T_e}{l(t)} - \frac{k}{\alpha} \frac{T_0(t)}{l(t)}$$

$$T_0(t) = \frac{T_a + \frac{k}{\alpha} \frac{T_e}{l(t)}}{1 + \frac{k}{\alpha l(t)}} = \frac{T_a \alpha l(t) + k T_e}{k + \alpha l(t)}$$

$$\text{Soit } \frac{dl}{dt} = \frac{\alpha}{\rho L} \left( \frac{T_a \alpha l(t) + k T_e}{k + \alpha l(t)} - T_a \right) \\ = \frac{\alpha}{\rho L} \frac{k (T_e - T_a)}{k + \alpha l(t)}$$

$$\int_0^l (k + \alpha l(t)) \frac{dl}{dt} = \frac{\alpha k}{\rho L} (T_e - T_a)$$

$$k l(t) + \alpha \frac{l^2(t)}{2} = \frac{\alpha k}{\rho L} (T_e - T_a) t$$

$$l^2(t) + \frac{2k}{\alpha} l(t) - \frac{2k}{\rho L} (T_e - T_a) t = 0$$

$$\Delta = \frac{4k^2}{\alpha^2} + \frac{8k}{\rho L} (T_e - T_a) t > 0$$

$$\left( l + \frac{k}{\alpha} \right)^2 = \dots$$

$$l(t) = -\frac{k}{\alpha} + \sqrt{\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{2k}{\rho L} (T_e - T_a) t} \\ = \frac{k}{\alpha} \left[ \sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{\rho k L} (T_e - T_a) t} - 1 \right]$$

$$T_0(t) = \frac{T_a \cdot \alpha l(t) / k + T_e}{1 + \frac{\alpha l(t)}{k}} \\ = \frac{\left( \sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{\rho k L} (T_e - T_a) t} - 1 \right) T_a + T_e}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{\rho k L} (T_e - T_a) t}}$$

$$T_0(t) = T_a + \frac{T_e - T_a}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{\rho k L} (T_e - T_a) t}}$$

## 3. Résistance chauffante – CCINP

$T_0$ 

$$\delta Q = aC(T - T_0)dt$$


$\Sigma I =$  résistance  
 1<sup>er</sup> principe entre  $t$  et  $t+dt$   
 $dH = \delta Q_{reçu} = Pdt - aC(T - T_0)dt = CdT$

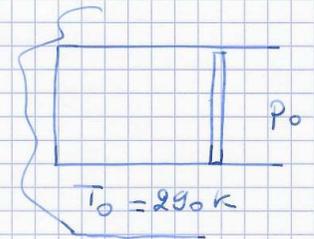
Soit  $C \frac{dT}{dt} + aC T = \frac{P}{C} + aC T_0$

$T$  est de la forme  $T(t) = T_0 + \frac{P}{aC} + A e^{-t/\tau}$   
 avec  $\tau = 1/a$

On a  $T(0) = T_0 = T_0 + \frac{P}{aC} + A$

$$T(t) = T_0 + \frac{P}{aC} (1 - e^{-at})$$

## 4. Entropie et changement d'état – CCINP



$$\Delta S_{i \rightarrow f} = -\frac{L_{vap}}{T_1} + C_l \ln \frac{T_0}{T_1}$$

Or d'après le 2<sup>nd</sup> principe  $\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{éch} + S_{créé}$

$$S_{éch} = \frac{Q}{T_0}$$

D'après le 1<sup>er</sup> principe  $\Delta H = Q$

avec  $\Delta H = -L_{vap}(T_1) + C_l(T_0 - T_1)$

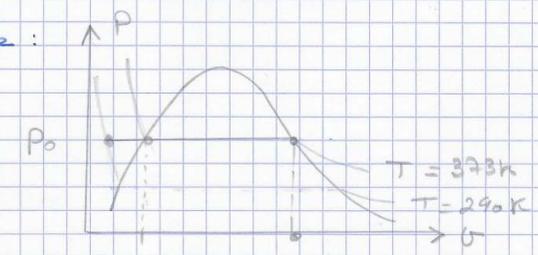
Il vient 
$$S_{éch} = -\frac{L_{vap}(T_1)}{T_0} + C_l \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$S_{créé} = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{éch}$$

$$= -\frac{L_{vap}}{T_1} + C_l \ln \frac{T_0}{T_1} + \frac{L_{vap}}{T_0} - C_l \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$= L_{vap} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) - C_l \left(1 - \frac{T_1}{T_0} + \ln \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$> 0$$

Remarque :
 

5. Atmosphère avec gradient de température – Mines

Eq. fondamentale de la statique des fluides

$$\vec{0} = -\text{grad } P + \rho \vec{g}$$

$\Sigma_s$  = atmosphère à l'équilibre mécanique

$$T(z) = T_0 - kz$$

BdF le poids  
 $\uparrow g$  les forces pesantes

$$0 = -\frac{dP}{dz} - \rho g$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

avec  $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$

$$MP(z) = \rho(z) RT(z)$$

$$\rho(z) = \frac{MP(z)}{RT(z)}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\rho(z) Mg}{RT(z)}$$

$$\frac{dP/dz}{P} = -\frac{Mg}{R(T_0 - kz)}$$

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_0^z \frac{Mg}{kR} \frac{-k dz}{T_0 - kz}$$

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{kz}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Rk}}$$

$k \approx -6^\circ\text{C}/\text{cm}$

6. Fusible – Mines

1,  $\sigma$

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_x$$

$$\vec{j}_{th} = j_{th} \vec{e}_r$$

- $\vec{j}_{th} = -d \text{grad } T$
- $P = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = 2\pi r L j_{th}(r)$
- Régime stationnaire entre  $r$  et  $r+dr$ .  
 $-2\pi L (r+dr) j_{th}(r+dr) + 2\pi L r j_{th}(r) + 2\pi r dr \left(\frac{j^2}{\sigma}\right) = 0$   
 $\frac{j^2}{\sigma} r dr = \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr$  avec  $\vec{j}_{th} = -d \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) \vec{e}_r$  (Fourier)

$$r \frac{j^2}{\sigma} + d \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{j^2}{\sigma} r$$

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{j^2}{\sigma} \left( \frac{r^2}{2} + C_1 \right)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{j^2}{\sigma} \left( \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \right) \leftarrow \text{défini en } r=0.$$

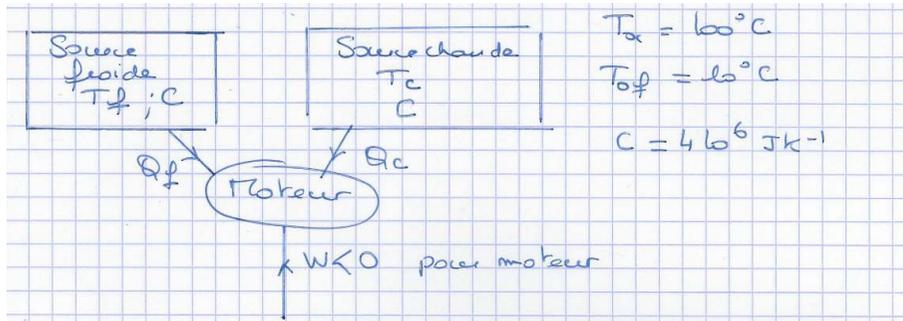
$$T(r) = -\frac{j^2}{4\sigma} r^2 + B$$

$$T(R) = T_0 = B - \frac{j^2 R^2}{4\sigma}$$

$$T(r) = T_0 + \frac{j^2}{4\sigma} (R^2 - r^2)$$

$T_{\text{max}} = T_0 + \frac{j^2 R^2}{4\sigma}$   
 en  $r=0$ .

7. Moteur avec pseudo-sources – Centrale



2] Le moteur s'adapte quand les 2 sources ont la même température  $T_{fi}$ :

⚠ Pseudo source  $T \neq ct$   $\Rightarrow$  il faut faire des bilans sur 2 cycle élémentaire pour avoir  $T_c = ct$  et  $T_f = ct$ .

Bilan énergétique  $0 = \delta W + \delta Q_c + \delta Q_f$   
 Bilan entropique  $\frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} = 0$  } 1 cycle du moteur.

Pour la source chaude :  $C dT_c = -\delta Q_c$   
 froide :  $C dT_f = -\delta Q_f$

D'où  $-C \frac{dT_c}{T_c} - C \frac{dT_f}{T_f} = 0$

$\Leftrightarrow \int_{T_{oc}}^{T_{fi}} \frac{dT_c}{T_c} + \int_{T_{of}}^{T_{fi}} \frac{dT_f}{T_f} = 0$

$\ln \frac{T_{fi}^2}{T_{oc} T_{of}} = 0$   $T_{fi} = \sqrt{T_{oc} T_{of}}$

$T_{fi} = 325 K = 52^\circ C$

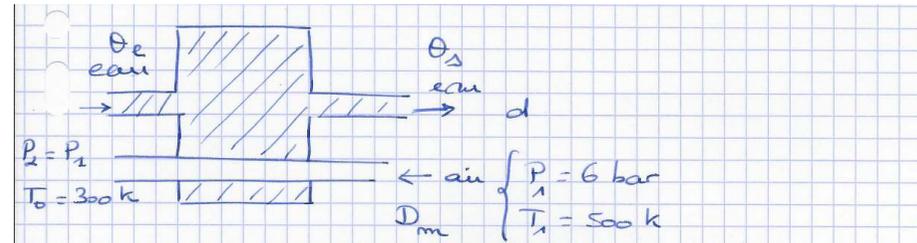
3]  $W = -Q_c - Q_f = +C(T_{fi} - T_{oc}) + C(T_{fi} - T_{of})$

$W = 24 MJ$

4]  $\eta = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{T_{fi} - T_{of}}{T_{fi} - T_{oc}}$   $\eta = 12,5\%$

$\eta_e = 1 - T_{of}/T_{oc}$   $\eta_e = 24\% > \eta$  Ok car pas au cours des cycles

8. Échangeur



1] Écoulement stationnaire, 1<sup>er</sup> principe énergétique entre  $T_{e1}$  et  $T_{e2}$   
 $D_m \frac{d(h_s - h_e)}{dt} = \delta Q_{air}$   $D_m c_{p,air} (T_0 - T_1) = \frac{\delta Q_{air}}{dt}$

Pour l'eau :  $dC(\theta_s - \theta_e) = P_{eau}$

2] Échangeur thermique  $\delta Q_{air} = -\delta Q_{eau}$

3] On a donc  $D_m c_{p,air} (T_0 - T_1) + dC(\theta_s - \theta_e) = 0$   
 $\theta_s = \theta_e + \frac{D_m c_{p,air}}{dC} (T_1 - T_0)$  AN:  $\theta_s = 15^\circ C$

3] Pour l'air :  $D_m dt (s_s - s_e) = \delta S_{ech} + \delta S_{c,air}$   
 Pour l'eau :  $d dt (s_{s,eau} - s_{e,eau}) = \delta S'_{ech} + \delta S_{c,eau}$   
 Or  $\delta S_{ech} + \delta S'_{ech}$  (terme d'échange)

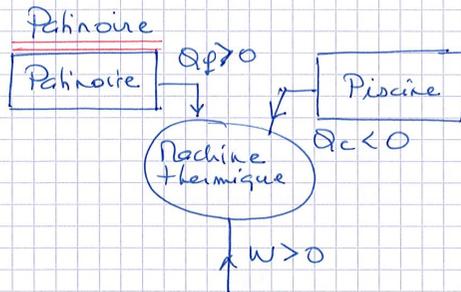
D'où  $\frac{\delta S_c}{dt} = \frac{\delta S_{c,air}}{dt} + \delta S_{c,eau}$   
 $= d(s_s - s_e)_{eau} + D_m (s_s - s_e)_{air}$

5]  $\frac{\delta S_c}{dt} = dC \ln \frac{\theta_s}{\theta_e} + D_m c_{p,air} \ln \frac{T_0}{T_1}$

AN:  $\frac{\delta S_c}{dt} = 0,8 J K^{-1} s^{-1}$



## 11. Patinoire - Centrale



Patinoire  $V_1 = 20 \text{ m}^3$   $T_i = 20^\circ\text{C}$   $T_{f1} = -5^\circ\text{C}$   $= 268 \text{ K}$   
 $\text{H}_2\text{O}(s)$   $\text{H}_2\text{O}(l)$

Piscine  $V_2 = 250 \text{ m}^3$   $T_i = 20^\circ\text{C}$   $T_{f2} = ?$

2. Processus source  $\Rightarrow$  bien sur 1 cycle élémentaire

$$\frac{\delta Q_f}{T_f} + \frac{\delta Q_c}{T_c} = 0 \quad (\text{réversible})$$

avec  $\delta Q_c = -\rho_{\text{eau}} e dT_2$

3 transf pour la patinoire

$$\text{① } \delta Q_f = -\rho_{\text{eau}} c dT_1$$

$$\Delta S_{\text{patinoire}} = \rho_{\text{eau}} V_1 \left[ c \ln \frac{T_{f1}}{T_i} + \frac{L_{\text{fus}}}{T_{f1}} + c \ln \frac{T_i}{T_{f1}} \right]$$

$$\Delta S_{\text{piscine}} = \rho_{\text{eau}} V_2 c \ln \left( \frac{T_{f2}}{T_i} \right)$$

$$\Delta S_{\text{patinoire}} + \Delta S_{\text{piscine}} = S_{\text{écl. pat}} + S_{\text{écl. pis}} = 0.$$

$$\text{Soit } \ln \frac{T_{f2}}{T_i} = \frac{V_1}{V_2} \left[ \ln \frac{T_{f1}}{T_i} - \frac{L_{\text{fus}}}{c T_{f1}} \right]$$

$$T_{f2} = T_i \left( \frac{T_{f1}}{T_i} \right)^{V_1/V_2} e^{-\frac{V_1/V_2 L_{\text{fus}}}{c T_{f1}}}$$

$$T_{f2} = 29^\circ\text{C}.$$

$$3) -\Phi_1 = +\Delta H_1 = \rho_{\text{eau}} V_1 \left[ c \cdot (T_{f1} - T_i) - L_{\text{fus}} \right]$$

$$\Phi_1 = 24,7 \text{ GJ} \quad +\Phi_2 = +\Delta H_2$$

$$\Phi_2 = 9,0 \text{ GJ}$$

$$\text{On a } W = -\Phi_f - \Phi_c = +\Phi_1 + \Phi_2 \quad W = 4,2 \text{ GJ}$$

$$\text{avec } W = P \Delta t \quad \Delta t = 2,15 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$\Delta t = 60 \text{ heures !}$$

$$\text{5 Rendement } \eta = \frac{\Phi_f}{W} = -\frac{\Phi_1}{W}$$

$$\eta = 1,1.$$

12. Demi-coquille – CCINP

Demi-coquille.

1. loi de Fourier  $\vec{j} = -\lambda \text{grad } T$   
 $\text{Wm}^{-2}$   $\uparrow$   $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

2)  $\Sigma = 1/2$  coquille sphérique comprise entre  $r$  et  $r+dr$

$V = \frac{4\pi r^2 dr}{2} = 2\pi r^2 dr$   
 $S_{int} = 2\pi r^2$   $S_{ext} = 2\pi (r+dr)^2$

1<sup>er</sup> principe entre  $t$  et  $t+dt$ .

$\rho V c (T(r, t+dt) - T(r, t)) = 2\pi r^2 j(r) dt -$   
 $2\pi (r+dr)^2 j(r+dr) dt$   
 $c\rho 2\pi r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t} dt = -2\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j) dr dt$

Soit  $c\rho r^2 \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} (r^2 j)$

$c\rho r^2 \frac{\partial T}{\partial t} = +d \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j)$

Eq de la chaleur  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$

3. En régime stationnaire  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow r^2 \frac{dj}{dr} = \text{cte.}$

$\frac{dT}{dr} = \frac{C}{r^2}$   $T(r) = -\frac{A}{r} + B$

avec  $T(R_1) = T_1 = -\frac{A}{R_1} + B$   $T(R_2) = T_2 = -\frac{A}{R_2} + B$   
 $T_1 - T_2 = A \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$

$A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}}$   
 $T(r) = T_1 + \frac{R_2}{R_1 - R_2} (T_1 - T_2) \frac{1}{r} \left( -1 + \frac{R_1}{r} \right)$

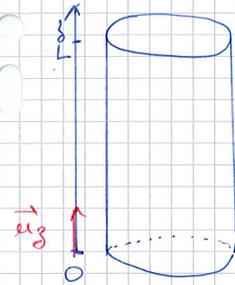
$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot \frac{R_2}{R_1 - R_2} \left( -1 + \frac{R_1}{r} \right)$

4  $j(r) = -\lambda \frac{A}{r^2}$   $\Phi(r) = 2\pi r^2 j(r) = -2\pi \lambda A = + \frac{T_1 - T_2}{R_2 - R_1} \frac{4\pi R_1 R_2}{2\pi}$

$\Phi(r) R_{1+2} = \frac{T_1 - T_2}{1+2}$   $R_{1+2} = \frac{2\pi (R_2 - R_1)}{\lambda R_1 R_2 2\pi}$

13. Sédimentation – CCINP

Sédimentation



Fluide  $\varphi$

$N$  particules solides  $m, \varphi_p > \varphi$

1. 1 particule ont masse  $\bar{m}$

$\vec{P} = m\vec{g} = \varphi_p V \vec{g}$  son poids

$\vec{\Pi}_A = -\varphi V \vec{j}$  poussée d'Archimède

$\vec{\phi} = -\alpha \vec{v}$

TRC:  $\varphi_p V \frac{d\vec{v}}{dt} = V \vec{g} (\varphi_p - \varphi) - \alpha \vec{v}$

$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_p} \right)$

2  $\vec{v}(t) = \frac{m\vec{g}}{\alpha} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_p} \right) + A e^{-t/\tau}$  avec  $\tau = \frac{m}{\alpha}$

$\vec{v}_{lim} = \frac{m\vec{g}}{\alpha} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_p} \right)$

3.  $\vec{j}_s(z) = C(z) \vec{v}_{lim} = C(z) \frac{m\vec{g}}{\alpha} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_p} \right)$

4. Les particules quittent le haut des cylindres et s'accumulent en bas des cylindres.  $\Rightarrow$  gradient de concentration de haut vers le bas  $\Rightarrow$  flux particuliers de diffusion  $\vec{j}_2 = -D \text{grad } C$

5. Soit  $\phi$  le flux de particules  $\bar{m}$  travers une section  $S$  à l'altitude  $z$   $\Phi(z) = \text{cte}$  à l'équilibre = 0 en  $z=0$  or  $L$ .

$\Phi(z) = \int_1 S \vec{j}_1 dz + \int_2 S \vec{j}_2 dz$

Soit  $0 = S C(z) \left( -\frac{m\vec{g}}{\alpha} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_p} \right) \right) + S D \frac{dC}{dz}$

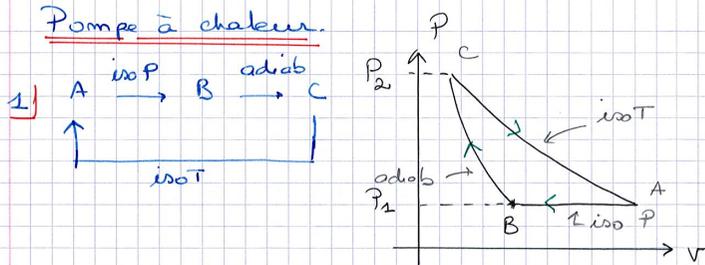
Soit  $\frac{dC}{dz} + \frac{C m g}{\alpha D} \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_p} \right) = 0$   $\text{kg m s}^{-2} / \text{m s}^{-1}$

6  $C(z) = C_0 e^{-z/H}$  avec  $H = \alpha D / m g (1 - \varphi / \varphi_p)$

avec  $\int_0^L S C(z) dz = N$

$S D H (1 - e^{-L/H}) = N$   $\lambda = \frac{N}{S H} \frac{1}{1 - e^{-L/H}}$

14. Pompe à chaleur – CCINP



2] Récepteur → sens horaire

3]. IsoT ⊕ 1<sup>ère</sup> loi de Joule (GP)

$$\Delta U = 0 = W_{CA} + Q_{CA}$$

avec  $W_{CA} = - \int P_{ext} dV$  } OS et MR

$$= - \int P dV$$

$$= - \int nRT \frac{dV}{V}$$

$$= - nRT_C \int_c^A \frac{dV}{V}$$

$$= - nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C}$$

et  $S_{ech} = \frac{Q_{CA}}{T_C} = nR \ln \frac{V_A}{V_C}$

or B → C adiab rév  $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

et A → B iso P  $P_1 V_A = nRT_A$   
 $P_1 V_B = nRT_B$

soit  $\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$

$$\frac{V_A}{V_C} = \frac{V_A}{V_B} \times \frac{V_B}{V_C} = \frac{T_C}{T_B} \times \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{1/\gamma-1}$$

$$= \left( \frac{T_B}{T_C} \right)^{-1/\gamma-1} = \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{1+1/\gamma-1}$$

$$= \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{-2-\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\Delta S_{C \rightarrow A} = S_{ech} = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right)$$

ou C → A isoT  $P_A V_A = P_C V_C$

$$\frac{V_A}{V_C} = \frac{P_C}{P_A} = \frac{P_C}{P_B}$$

avec  $P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma = P_C^{1-\gamma} T_C^\gamma$

$$\frac{V_A}{V_C} = \frac{T_B}{T_C}^{\gamma/(1-\gamma)} = \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

4. Efficacité :  $\eta = \frac{\text{transfert utile}}{\text{transfert couteux}}$   
 ↑ W.

Inrobaire  $\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B} > 1 \rightarrow T_C > T_B$

$Q_c = Q_{CA}$   $\eta = \frac{-Q_{CA}}{W} = \frac{Q_{CA}}{Q_{CA} + Q_{AB} + Q_{BC}}$

$$\eta = \frac{nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C}}{nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C} + nR \frac{\gamma}{\gamma-1} (T_B - T_A)}$$

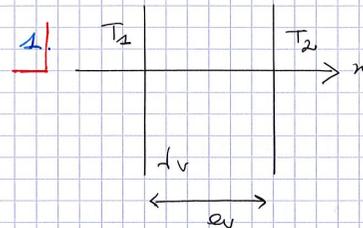
$$\eta = \frac{nR \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right)}{nR \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_A}{T_B} + nR \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{T_B}{T_A} - 1\right)}$$

$$= \frac{\ln(T_A/T_B)}{\ln(T_A/T_B) + \frac{T_B}{T_A} - 1}$$

AN  $\eta = 5,62$ .

15. Double vitrage – CCINP

Double vitrage.



ⓐ Loi de Fourier.

$$\vec{j} = -\lambda_v \text{grad } T$$

$$[\|\vec{j}\|] = \frac{[\text{puissance}]}{[\text{surface}]}$$

$$[\|\vec{j}\|] = M L^2 T^{-3} L^{-2} = M T^{-3}$$

$$[e_v] = M L^{-1} \theta^{-1} T^{-3}$$

ⓑ Eq. de diffusion @ régime stationnaire

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad T(x) = Ax + B$$

avec  $T(0) = T_1 = B$

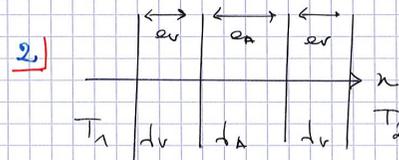
$$T(e_v) = T_2 = A e_v + B \rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{e_v}$$

$$T(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{e_v} + T_1$$

ⓒ Par définition  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \vec{j} \cdot \vec{S}$  avec  $\vec{S} = S \vec{e}_x$

$$\Phi = -\lambda_v A S = \frac{\lambda_v S}{e_v} (T_1 - T_2)$$

$$\text{or } R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e_v}{S \lambda_v}$$



ⓐ Régime stationnaire  
Génération du flux

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{2e_v}{S \lambda_v} + \frac{e_a}{S \lambda_a}} = S \frac{T_1 - T_2}{2 \frac{e_v}{\lambda_v} + \frac{e_a}{\lambda_a}}$$

$$\phi'_{1 \rightarrow 2} = \phi_{1 \rightarrow 2} \times \frac{1}{2 + \frac{e_n d_v}{e_r d_A}}$$

ⓑ.  $d_{nr} < d_{air} \Rightarrow \phi' \oplus$  petit.

ⓒ.  $\phi'_{1 \rightarrow 2} = 86 \text{ W}$ .  $\phi_{1 \rightarrow 2} = 4,06 \text{ W}$ .

ⓓ.

## 16. Éponge

1. Le régime n'est pas permanent, car la pression est égale à la pression d'équilibre liquide-vapeur à une distance variable du centre, mais on peut supposer que la concentration dans la partie sèche varie lentement au cours du temps. On utilise alors l'expression de l'énoncé, qui l'on intègre entre  $R(t)$  et  $R_0$ . On obtient

$$n^*(r, t) - n^*(R(t), t) = \frac{\phi(t)}{4\pi D} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R(t)} \right)$$

Les pressions partielles étant connues en  $r = R_0$  et  $r = R(t)$ , on en déduit

$$n^*(R_0) = \frac{p_{ext}}{k_B T} \text{ et } n^*(R(t), t) = \frac{p_{v, sat}}{k_B T}$$

On en déduit que

$$\frac{p_{ext} - p_{v, sat}}{K_B T} = \frac{\phi(t)}{4\pi D} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R(t)} \right) \quad (1)$$

Le nombre  $N(t)$  de molécules d'eau dans l'éponge à l'instant  $t$  est

$$N(t) = N_{vap}(t) + N_{liq}(t)$$

Sauf en toute fin de séchage, on peut négliger le nombre de molécules à l'état vapeur devant le nombre de molécules à l'état liquide. On peut aussi négliger le volume des parois des pores de l'éponge devant le volume des pores eux-mêmes. Dans ce cas, on peut écrire

$$N(t) \simeq n \frac{4\pi R^3(t)}{3}$$

en notant  $n = \frac{\rho}{m}$  la densité moléculaire en eau dans la phase liquide. Le nombre de molécules s'échappant de l'éponge par unité de temps est

$$-\frac{dN}{dt} = \phi(t)$$

soit

$$\phi(t) = -\frac{4\pi n}{3} \frac{dR^3(t)}{dt} = -4\pi n R^2(t) \frac{dR(t)}{dt}$$

En remplaçant  $\phi(t)$  par cette expression dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{p_{ext} - p_{v, sat}}{K_B T} = -\frac{n}{D} \left( \frac{R^2(t)}{R_0} - R(t) \right) \frac{dR(t)}{dt} \quad (2)$$

En intégrant entre  $t = 0$  et  $t = \tau$ ,  $R(t)$  varie de  $R_0$  à 0 soit

$$\frac{P_{ext} - P_{v,sat}}{k_B T} \tau = -\frac{n}{D} \left[ \frac{R^3}{3R_0} - \frac{R^2}{2} \right]_{R_0}^0$$

soit

$$\tau = \frac{n k_B T}{D (P_{v,sat} - P_{ext})} \left[ 0 - \frac{R_0^3}{3R_0} + \frac{R_0^2}{2} \right] = \frac{n k_B T R_0^2}{6D (P_{v,sat} - P_{ext})}$$

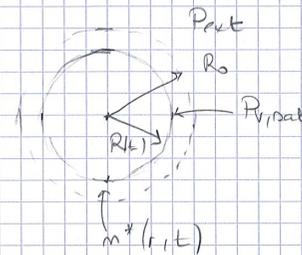
2. La densité particulaire dans l'eau liquide est

$$n = \frac{\rho}{m} = \frac{\rho N_A}{M_{H_2O}} = 3,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

La pression saturante étant donnée à 25°C, on prend la température  $T = 298 \text{ K}$ .  
On obtient ainsi

$$\tau \simeq 45 \text{ j}$$

Eponge.



$$1) \quad \frac{\partial n^*}{\partial r} = -\frac{\Phi(t)}{4\pi D r^2}$$

$\Sigma$ : Coquille creuse comprise entre  $R(t+dt)$  et  $R(t)$

EI eau liquide

EF eau gaze à la pression

$P_{v,sat}$

$$\text{On a } \Phi(t) \times 4\pi R^2(t) = N_i - N_f$$

$$\text{avec } N_i = \varphi \times 4\pi R^2(t) (R(t) - R(t+dt)) \frac{dA}{M_{H_2O}}$$

$$N_f = m_f dA = dA \frac{P_{v,sat}}{RT} \times V \ll N_i$$

$$\text{Soit } \Phi(t) = -\frac{dR}{dt} \frac{\varphi dA}{M_{H_2O}} 4\pi R^2(t)$$

$$\text{D'autre part } m^*(r,t) = +\frac{\Phi(t)}{4\pi D r} + \text{cte}$$

$$\text{avec } m^*(R(t), t) = \frac{P_{v,sat}}{k_B T}$$

$$\text{et } m^*(R_0, t) = \frac{P_{ext}}{k_B T}$$

$$\text{D'où } \Phi(t) \left( \frac{1}{4\pi D R(t)} - \frac{1}{4\pi D R_0} \right) = \frac{P_{v,sat} - P_{ext}}{k_B T}$$

$$\text{Il vient } 4\pi D \frac{R(t) R_0}{R_0 - R} \frac{P_{v,sat} - P_{ext}}{k_B T} = -\frac{dR}{dt} \frac{\varphi dA}{M_{H_2O}} \times 4\pi R^2(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} R (R_0 - R) &= \frac{DM_{H_2O} \phi R A}{k_B T p c_A} (P_{ext} - P_{v, sat}) R_0 \\ &= \frac{DM_{H_2O}}{\phi R T} (P_{ext} - P_{v, sat}) R_0 \\ \int_{R_0}^0 (R R_0 - R^2) dR &= \frac{DM_{H_2O}}{\phi R T} (P_{ext} - P_{v, sat}) R_0 \tau \\ &= \left[ \frac{R_0 R^2}{2} - \frac{R^3}{3} \right]_{R_0}^0 \\ &= -\frac{R_0^3}{2} + \frac{R_0^3}{3} = -\frac{R_0^3}{6} \\ \tau &= \frac{\phi R T}{DM_{H_2O} (P_{v, sat} - P_{ext})} \frac{R_0^2}{6} \end{aligned}$$

$$AN \tau = 4,76 \text{ s} \rightarrow 52 \text{ jours !}$$

## 17. Machine à vapeur

1. L'état 1 se situe à l'intersection de l'isotherme  $T = 250^\circ\text{C}$  et de l'isotitre  $x = 0$  (coube d'ébullition); on en déduit  $p_1 = 40$  bars.

L'état 2 se situe à l'intersection de l'isobare  $p = 40$  bars et de l'isotitre  $x = 1$  (coube de rosée); on en déduit  $T_2 = 250^\circ\text{C}$ .

En supposant que la détente est adiabatique dans la turbine, la transformation  $2 \rightarrow 3$  est pratiquement isentropique; graphiquement, on obtient, à l'intersection de l'isentropique  $s = s_2$  et de l'isobare  $p = 1$  bar :  $x_3 = 0,72$ .

En supposant que la compression est adiabatique dans le compresseur, transformation  $4 \rightarrow 1$  est pratiquement isentropique; graphiquement, on obtient, à l'intersection de l'isentropique  $s = s_1$  et de l'isobare  $p = 1$  bar :  $x_4 = 0,28$ .

Le tableau complet est ainsi

Etat	$T(^{\circ}\text{C})$	$p(\text{bars})$	$x$
1	250	40	0
2	250	40	1
3	100	1	0,72
4	100	1	0,28

2. Graphiquement, on lit

$$\begin{aligned} h_1 &= 1100 \text{ kJ.kg}^{-1}; \\ h_2 &= 2800 \text{ kJ.kg}^{-1}; \\ h_3 &= 2200 \text{ kJ.kg}^{-1}; \\ h_4 &= 930 \text{ kJ.kg}^{-1} \end{aligned}$$

Le travail massique reçu par le fluide est

$$-w_{ut} = (h_1 - h_4) + (h_3 - h_2)$$

La chaudière fournit à l'unité de masse de fluide

$$q_C = h_2 - h_1$$

Le rendement est

$$\eta = \frac{w_{ut}}{q_C} = \frac{h_2 - h_3 + h_4 - h_1}{h_2 - h_1} = 1 + \frac{h_4 - h_3}{h_2 - h_1}$$

Numériquement, on obtient

$$\eta = 0,25$$

Le rendement d'une machine de Carnot fonctionnant entre les sources  $T_C = 523$  K et  $T_F = 373$  K est  $\eta = \frac{w_{ut}}{q_C}$ , avec

$$\begin{cases} q_C + q_F - w_{ut} = 0 \\ \frac{q_C}{T_C} + \frac{q_F}{T_F} = 0 \end{cases} \text{ soit } q_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) = w_{ut}$$

et finalement

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0,28$$

Le rendement apparaît, aux erreurs d'arrondi près, proche du rendement de Carnot.

3. Le rendement de Carnot en réalité

$$\eta' = 1 - \frac{T_0}{T_C} = 0,44$$

Le rendement est donc en réalité nettement inférieur au rendement de Carnot.

4.  $D$  étant le débit massique, la puissance utile est

$$\mathcal{P}_{ut} = Dw_{ut}$$

On en déduit que

$$D = \frac{\mathcal{P}_{ut}}{w_{ut}} = \frac{10^6}{630 \cdot 10^3} = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 18. Lampe à incandescence

1. Une petite partie de la puissance est échangée par échange conducto-convectif entre le filament et le gaz résiduel dans l'ampoule; l'essentiel est rayonné, mais majoritairement dans le domaine infra-rouge, car la température du filament est nettement inférieure à la température de surface du Soleil.

2. A l'équilibre, si on néglige les échanges conducto-convectifs, la puissance rayonnée par le filament est égale à la puissance dissipée par effet Joule. L'aire d'émission est

$$\mathcal{A} = \pi D l$$

La condition d'équilibre s'écrit donc

$$\mathcal{P} = \pi D l \sigma T^4 \text{ soit } l = \frac{\mathcal{P}}{\pi D \sigma T^4} = 0,26 \text{ m}$$

3. La conductivité  $\gamma$  du tungstène à la température de fonctionnement de la lampe est telle que

$$\mathcal{P} = GU^2 \text{ avec } G = \gamma \frac{\pi D^2}{4l}$$

soit

$$\gamma = 4.10^5 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

4. La résistance électrique du filament est

$$R = \frac{1}{G} = \frac{4l}{\pi D^2 \gamma}$$

A la température d'équilibre, on obtient

$$R = 530 \Omega$$

et à la température ambiante, on obtient

$$R_0 = 23,6 \Omega$$

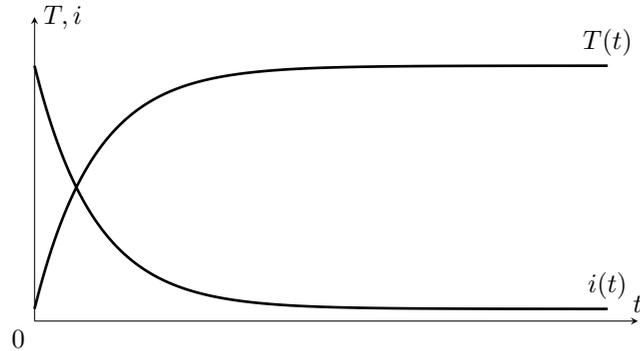
Si on modélise la résistance par une loi affine de la température, on obtient

$$R(T) = a + bT$$

avec

$$b = \frac{R - R_0}{T - T_0} = 0,19 \Omega \cdot \text{K}^{-1} \text{ et } a = 19,8 \Omega$$

5. La puissance électrique est de la forme  $\frac{U^2}{a + bT}$ ; c'est une fonction décroissante de la température. La puissance rayonnée est  $\mathcal{A}\sigma T^4$ ; c'est une fonction croissante de la température. Si  $U$  est bien choisie, il existe une température inférieure à la température de fusion pour laquelle ces deux puissances sont égales.



6. La température peut être considérée comme uniforme dans le filament si le temps caractéristique  $\tau_D$  de la diffusion thermique radiale est négligeable devant le temps caractéristique d'évolution de la température. La diffusion thermique s'effectue sur une longueur caractéristique  $\frac{D}{2}$ ; le coefficient de diffusion correspondant est la diffusivité thermique

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c} = 6,9 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

On en déduit

$$D_{th} = \frac{D^2}{4} \tau_D^{-1} \text{ soit } \tau_D = \frac{D^2}{4D_{th}} = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

7. La dérivée par rapport au temps de l'énergie interne du filament est la différence entre la puissance électrique reçue et la puissance rayonnée, soit

$$mc \frac{dT}{dt} = \frac{U^2}{R(T)} - \mathcal{A}\sigma T^4$$

où  $m = \rho \frac{\pi D^2 l}{4} = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$  est la masse du filament. On en déduit l'équation différentielle régissant la température

$$mc \frac{dT}{dt} = \frac{U^2}{a + bT} - \mathcal{A}\sigma T^4$$

En l'absence d'outil logiciel d'intégration numérique, on peut alors estimer que

$$mc \frac{\Delta T}{\Delta t} < \frac{U^2}{R_0} \text{ soit } \Delta t > \frac{mc \Delta T R_0}{U^2} = 10^{-3} \text{ s}$$

Ce n'est pas supérieur à  $\tau_D$ . Cela ne suffit donc pas pour affirmer que la température du filament est uniforme. L'utilisation de l'outil informatique s'impose donc pour pouvoir conclure.