



Mécanique des fluides

I Rapports

CCINP 2023

Les bilans macroscopiques de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique pour les fluides en écoulement stationnaire constituent une véritable difficulté pour nombre de candidats. Leur mise en place exige une définition précise du système fermé à partir d'un système ouvert défini par une surface de contrôle. Un effort est attendu sur ce point. Les forces pressantes sont souvent oubliées.

Dans les bilans d'énergie cinétique ou mécanique, la puissance des forces intérieures doit être évoquée.

De façon générale, en mécanique des fluides, il est important de bien analyser les hypothèses relatives à la nature des écoulements, avant d'entreprendre la simplification de l'équation de Navier-Stokes ou l'utilisation d'une relation de Bernoulli.

CCINP 2022

Les bilans macroscopiques ont, cette année, posé davantage de difficultés aux candidats. C'est un point délicat et important du programme de deuxième année. Sa mise en place exige une définition précise du système fermé à partir d'un système ouvert défini par une surface de contrôle. Un effort est attendu sur ce point, y compris pour le vocabulaire utilisé : parler « du système S et du système S^* » n'est pas suffisant (Idem 2021 et 2019).

Dans les bilans de quantité de mouvement, il est parfois nécessaire de changer de référentiel pour se placer en régime stationnaire (nécessaire pour utiliser la relation de Bernoulli par exemple). À ce propos, signalons que pour la relation de Bernoulli, il faut non seulement connaître la relation, mais aussi les hypothèses et les conditions d'application qui l'accompagnent.

Mines-ponts 2023

En statique des fluides, un nombre non négligeable de candidats semblent considérer que poussée d'Archimède et résultante des forces de pressions sont distinctes. Les calculs de forces pressantes illustrent le fait que beaucoup de candidats ne savent pas qu'une base cylindrique ou sphérique est locale : ceci a pour conséquence des résultats étonnants de forces pressantes ; l'utilisation des symétries du problème puis la sommation des projections permet de grandement simplifier les calculs dans la plupart des situations abordées.

Mines-Ponts 2022

Le calcul des forces de pression en statique des fluides est souvent mal maîtrisé. Trop de candidats pensent qu'une surface soumise aux forces de pression d'un fluide subit forcément « le poids du fluide au-dessus ». Ce n'est généralement pas le cas et chaque situation doit être étudiée en détail. Poussée d'Archimède et résultante des forces de pression sont régulièrement comptabilisées toutes deux dans le bilan des forces.

Certains candidats justifient à tort l'utilisation de la relation de la statique des fluides par une hypothèse de stationnarité de l'écoulement.

La notion de force de portance est souvent mal maîtrisée.

La force surfacique de viscosité est souvent utile. Elle ne nécessite pas de calculs d'analyse vectorielle, cependant les candidats l'utilisent peu.

La relation associée au théorème de Bernoulli est généralement bien connue des candidats. Ce n'est pas toujours le cas des hypothèses nécessaires à son application. L'étude d'écoulements réels est souvent mal adaptée par les candidats à partir des résultats du cours.

La dérivée particulière reste mal comprise d'un grand nombre de candidats. L'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes n'est pas toujours connue.

Une part non négligeable des candidats ne pense pas à évaluer un nombre de Reynolds pour choisir ou valider un modèle d'écoulement. En outre, la longueur caractéristique à utiliser dans le nombre de Reynolds n'est pas toujours judicieusement choisie.

Centrale-Supélec 2022

Comme l'an passé, la mise en place de bilan est souvent compliquée voire impossible : il faut impérativement revoir ce point en commençant par la définition du système ET du référentiel, ce dernier passant souvent à la trappe. Les hypothèses de la relation de Bernoulli sont généralement connues formellement mais semblent compliquées à vérifier in situ. La mise en équation des écoulements classiques (Poiseuille, Couette) n'a pas toujours été fluide, de même que la mise en place d'une forme de champ des vitesses ou la projection des équations usuelles (connaissance et maîtrise des opérateurs à revoir).

Centrale-Supélec 2021

La justification des dépendances et des directions du champ de vitesse en mécanique des fluides est encore moins évidente qu'en électromagnétisme. Les candidats n'ont en général pas les mêmes réflexes et peinent à parler d'invariance et de symétries (Idem 2019).

La poussée d'Archimède est le plus souvent confondue avec le théorème d'Archimède. Son utilisation est parfois illégitime sans que les candidats n'en réalisent la raison.

La mise en place de bilan est souvent compliquée voire impossible : il faut revoir ce point en commençant par la définition du système ET du référentiel, ce dernier passant souvent à la trappe.

II Questions de cours

- Équations d'Euler et de Bernoulli.
- Théorème de Bernoulli.
- Notion de viscosité.
- Démonstration du théorème de Bernoulli pour un écoulement incompressible, stationnaire, homogène, irrotationnel et parfait. Idem pour un écoulement rotationnel

III Exercices

1. Équilibre d'un fluide – CCINP

Un cylindre de rayon R est rempli d'eau sur une hauteur h . L'eau est en équilibre avec la pression atmosphère à la pression p_0 . On met en rotation le cylindre autour de son axe jusqu'à ce qu'il atteigne la vitesse angulaire ω . On constate que l'eau se met à tourner et finit par être en équilibre par rapport au cylindre. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

1. Déterminer la pression en tout point de l'eau.
2. Montrer que l'équation de la surface libre est une parabole du type :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + B$$

3. Déterminer l'expression de B.

2. Fluide visqueux entre deux plaques – Centrale

On a deux disques en rotation autour de l'axe Oz , de même rayon a . Le disque 1 (D_1) est à la cote $z = 0$ et le deuxième (D_2) à $z = e$ avec $a \gg e$, donc on peut négliger les effets de bords en $r = a$. Entre les deux disques il y a un fluide visqueux incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité η . D_1 tourne à la vitesse angulaire ω_1 et D_2 à la vitesse angulaire ω_2 . On donne le champ des vitesses : $\vec{v}(M, t) = v(r, z, t) \vec{e}_\theta$.

1. Justifier la forme du champ de vitesse : $\vec{v}(M, t) = r.\omega(z, t) \vec{e}_\theta$.
2. Si on a $v(z)$, la force exercée par une couche de fluide sur celle au-dessus est $d\vec{F} = -\eta.\frac{dv}{dz}dS\vec{e}_\theta$. On considère un petit volume élémentaire du fluide compris entre r et $r + dr$, θ et $\theta + d\theta$ et z et $z + dz$. Quelles sont les forces qui s'appliquent sur ce volume élémentaire ?
3. (a) Appliquer le théorème du moment cinétique au petit élément de fluide pour trouver l'équation de diffusion.
 (b) On se place en régime permanent. On a ω_1 et ω_2 qui sont constantes. Trouver l'expression de ω .
 (c) Quel est le couple que le fluide exerce sur le disque 1 ? Définir un coefficient de frottement entre les 2 disques.
 (d) Application numérique. Calculer f . Données pour l'huile de ricin : $\rho = 0,965 \text{ g.cm}^{-3}$, $\eta = 1015 \text{ mPa.s}$.
 (e) Vérifier que l'on est bien en régime laminaire.
4. L'ensemble du système est initialement au repos. À $t = 0$ on a $\omega_2 = \Omega$ et $\omega_1 = 0$. Déterminer l'ordre de grandeur de la mise en place du régime permanent.

3. Modèle de cyclone – CCINP

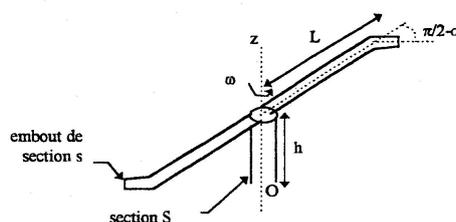
On assimile un cyclone à un cylindre infini de rayon $a = 50 \text{ m}$. Le vecteur tourbillon est de la forme $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$; il est uniforme à l'intérieur du cylindre, nul à l'extérieur. On donne pour $r = a$: $\|\vec{v}\| = 180 \text{ km/h}$.

1. Donner la relation entre $\vec{\Omega}$ et \vec{v} . Trouver une analogie électromagnétique.
2. Tracer l'allure des lignes de courant. Exprimer \vec{v} pour $v < a$ et $v > a$. Calculer numériquement Ω .
3. Loin du cyclone, $p = p_0$. Exprimer p à l'intérieur du cyclone.

4. Tourniquet hydraulique

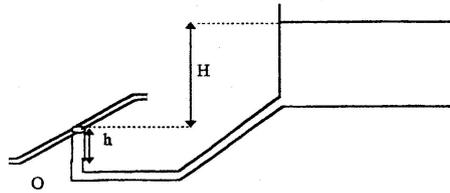
1. Question préliminaire — On considère un référentiel \mathcal{T} en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical Oz . Un fluide parfait incompressible est en écoulement permanent dans ce référentiel. Dédurre de l'application de la relation de la dynamique à la particule de fluide, une généralisation du théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant au cas de ce référentiel en rotation.

Un tourniquet hydraulique est constitué de deux tubes creux horizontaux de longueur L solidaires d'un axe vertical. Ils sont terminés par des embouts de section s et dont la normale fait un angle α avec la normale aux tubes. De l'eau arrive par l'axe du tube de section S et en ressort par les deux embouts.



Le tourniquet tourne à vitesse angulaire ω constante. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible et son écoulement dans le référentiel du tourniquet est supposé permanent. Elle sort sous forme d'un jet libre dans l'atmosphère à pression p_0 .

2. Soit D le débit massique de l'eau. Calculer la pression au point O en fonction de $h, s, S, D, \omega, L, \rho$ et g .



3. L'ensemble est relié à un réservoir suffisamment grand pour y négliger la vitesse de l'eau et considérer que sa hauteur est constante. Donner la relation entre D, H, ω, s, L, ρ et g . Commenter le résultat.

4. On s'intéresse dans cette question à l'action de l'eau sur le tourniquet assimilée à un couple de moment Γ par rapport à l'axe Oz .

a) En prenant un volume d'eau bien choisi, calculer ce couple.

b) Calculer la puissance fournie par l'eau au tourniquet.

Application numérique : $\alpha = 0, H = 10 \text{ m}, D = 3 \text{ kg.s}^{-1}, L = 10 \text{ cm}, g = 10 \text{ m.s}^{-2}, s = 1 \text{ cm}^2, \rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Calculer la puissance et le rendement du dispositif.

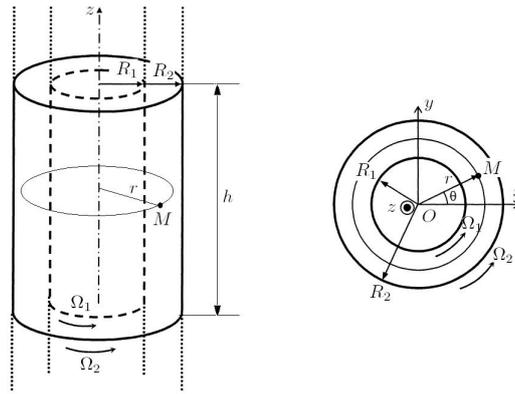
5. Citerne de pompier – CCINP

Un réservoir de pompier de longueur $L = 95 \text{ cm}$ selon Ox et de hauteur $H = 80 \text{ cm}$ selon Oz est rempli jusqu'à une hauteur $h = 65 \text{ cm}$. La pression à la surface est maintenue à $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ et l'eau a une masse volumique de $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ supposée constante.

1. Donner l'équivalent volumique des forces de pression. Retrouvez l'équation de la statique des fluides et en déduire $p(z)$.
2. Calculer la force de pression s'exerçant sur la face latérale. Faire l'application numérique. Commenter.
3. Le camion démarre avec une accélération $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$. Déterminer l'équation $z(x)$ de la surface libre.
4. Le camion est arrêté, on le vide par une ouverture en $z = 0$ de diamètre $d_1 = 3,1 \text{ cm}$ sur laquelle on fixe la lance à incendie. Celle-ci se termine par un embout conique dont la sortie est de diamètre $d_2 = 1,9 \text{ cm}$. Une pompe fournissant une puissance $P = 1,3 \text{ kW}$ permet d'obtenir un débit de volume $D_v = 3 \text{ L.s}^{-1}$ lorsque l'embout est à une altitude $Z > 0$. Calculer v_1 la vitesse du fluide à la sortie de la pompe et v_2 celle à la sortie de l'embout. Quelle est la hauteur Z atteinte par l'eau.

6. Viscosimètre de Couette

Un fluide incompressible est en mouvement permanent entre deux cylindres circulaires de rayons R_1 et R_2 qui tournent autour de leur axe commun aux vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 constantes. On suppose que la hauteur h des cylindres est grande devant les deux rayons, de sorte que l'écoulement pourra être supposé invariant par translation selon \vec{e}_z . On néglige les effets de la pesanteur.



1. Écrire la condition d'incompressibilité et les conditions aux limites imposées par les parois. En déduire que le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\theta$.
2. Écrire l'équation de Navier-Stokes et, grâce aux conditions aux limites imposées par les parois, déterminer le champ des vitesses et le champ des pressions.
3. Vérifier que la viscosité n'intervient pas. Peut-on en déduire que l'écoulement est inchangé si le fluide est parfait ?
4. On admet que la force surfacique de viscosité exercée par le fluide à l'intérieur du cylindre d'axe Oz et de rayon r sur le fluide à l'extérieur de ce cylindre s'exprime par

$$\vec{\varphi}_{s,visc} = -\eta r \frac{d}{dr} \left(\frac{v(r)}{r} \right) \vec{e}_\theta$$

Calculer le moment par rapport à l'axe Oz des efforts exercés par le cylindre extérieur sur le fluide.

5. Le cylindre intérieur est lié à un fil de torsion de constante de rappel C ; le cylindre extérieur est mis en rotation par un moteur électrique réglé à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_2 = \Omega \vec{e}_z$. On s'intéresse au régime permanent. Pour $\Omega = 5 \text{ rad/s}$, $R = 5 \text{ cm}$, $e = 1 \text{ mm}$, $h = 10 \text{ cm}$, on mesure un angle de torsion $\theta_e = 4,6^\circ\text{C}$ pour $C = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.rad}^{-1}$. En déduire la viscosité du fluide.

7. Fusée – CCINP

Une fusée est en mouvement dans un référentiel supposé galiléen. elle éjecte des gaz avec un débit massique D_m constant et une vitesse relative \vec{u} constante.

La fusée et son contenu constituent un système ouvert (\mathcal{S}) . On considère le système fermé (\mathcal{S}^*) constitué à l'instant t de (\mathcal{S}) c'est-à-dire de la fusée et son contenu. À l'instant $t + dt$, (\mathcal{S}^*) est constituée la fusée et son contenu constituant le système (\mathcal{S}) d'une part et des gaz qui ont été éjectés pendant dt d'autre part. On note $m(t)$ la masse de la fusée et de son contenu à l'instant t . On note \vec{v} le vecteur vitesse de la fusée et on suppose que le carburant y est à l'état solide.

1. Faire un schéma de la situation.
2. exprimer $m(t)$ en fonction de $m_0 = m(t = 0)$, D_m et t .
3. La fusée évolue dans l'espace vide loin de tout astre. Montrer que son mouvement est piloté par l'équation :

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = -D_m \vec{u}.$$

4. Cette équation est valable à chaque instant avec \vec{u} de même direction et de sens opposé à \vec{v} de telle sorte qu'en projetant sur la tangente à la trajectoire on peut écrire $m(t) \frac{dv}{dt} = -D_m u$.

Pour les missions spatiales lointaines on doit pouvoir atteindre $\Delta v = 80 \text{ m.s}^{-1}$ sur la durée totale de la mission. Calculer le pourcentage r que doit représenter la masse de carburant au départ si on utilise un moteur chimique à propergol pour lequel $u = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

8. Écoulements géostrophiques – Centrale

On étudie l'écoulement d'un fluide de masse volumique μ à la surface de la Terre. On note \mathcal{R} le référentiel géocentrique et \mathcal{R}' le référentiel terrestre.

1. Écrire l'équation d'Euler dans le référentiel \mathcal{R}' .
2. On définit le nombre de Rossby, noté Ro , comme le rapport du terme convectif $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ sur le terme $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. On note U la vitesse moyenne du fluide, L la distance caractéristique de l'écoulement et ν la viscosité cinématique.
 - Avec $U = 10 \text{ m.s}^{-1}$, $L = 1000 \text{ km}$ et $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, évaluer les nombres de Rossby Ro et de Reynolds Re .
 - Peut-on négliger la viscosité du fluide ?
 - Proposer une simplification de l'équation d'Euler.
3. a) Montrer qu'en régime stationnaire, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(P + \mu gz) = -2\mu\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$.
 b) Que dire de la pression dynamique $\hat{P} = P + \mu gz$ sur une ligne de courant ?
 c) Comparer avec le cas où le théorème de Bernoulli est applicable.
4. On utilise la base cylindrique pour repérer le champ des vitesses $\vec{v}(M) = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta$. On étudie un tourbillon, centré en A , de latitude λ . Le tourbillon est d'axe Az .
 - a) Montrer que le gradient vertical de pression est uniforme et indépendant de la vitesse d'écoulement.
 - b) On se place dans l'hémisphère Nord. On étudie un anticyclone et une dépression. À l'aide des questions précédentes, orienter le gradient de pression radial, les lignes de courant, l'axe de rotation et indiquer par une flèche la force de Coriolis.
 - c) Comment ces résultats sont-ils modifiés dans l'hémisphère sud ?

9. Forme d'un filet d'eau

La viscosité dynamique de l'eau à température ambiante est $\eta \simeq 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$. Un filet d'eau coule verticalement à l'air libre après avoir quitté un robinet de section horizontale circulaire de rayon $r_0 = 1 \text{ cm}$. Le régime est permanent ; le débit volumique est $D = 2.10^{-2} \text{ L.s}^{-1}$. Le filet d'eau présente une symétrie de révolution autour de son axe vertical Oz . L'axe Oz est orienté vers le haut et l'origine des altitudes est prise dans le plan de sortie du robinet.

1. L'écoulement en sortie du robinet est-il laminaire ? Peut-on le considérer comme parfait ?
2. Justifier que la pression est la même en tout point du filet d'eau.
3. En coordonnées cylindriques, déterminer l'équation $z = f(r)$ d'une génératrice de la surface libre du filet d'eau.
4. Le filet d'eau, continu sur une certaine distance, finit par se scinder en gouttes. Expliquer ce phénomène. Comment le débit du filet influe-t-il sur le lieu où se forment les gouttes ?