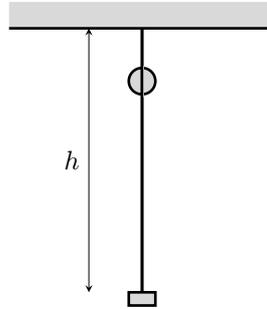




Préparation à l'X-ESPCE

1. Rupture d'un fil élastique



Une bille percée de masse m glisse sans frottement le long d'un fil élastique de longueur h et de section S .

On note Y le module élastique du fil et T^* la tension critique à partir de laquelle le fil casse.

1. Que peut-on dire de Y ?
2. Montrer que Y est bien une caractéristique propre au matériau constituant le fil.
3. Trouver la valeur de l'élongation au moment de la cassure hypothétique du fil.

1. Le module élastique (synonyme de module d'élasticité ou module d'Young) est le coefficient de proportionnalité entre la contrainte (force par unité de surface) et la déformation (allongement relatif) dans le domaine élastique, soit

$$\frac{F}{S} = Y \frac{\delta \ell}{\ell}$$

2.
 - Si on associe 2 fils identiques en série, pour une tension F donnée, la déformation est double : la déformation est donc proportionnelle à la longueur.
 - Si on associe 2 fils identiques en parallèle, pour une déformation $\delta \ell$ donnée, la tension est double : la tension est donc proportionnelle à la section.

On en déduit que Y est invariant par changement de géométrie du fil et ne dépend que du matériau.

3. Le fil étant de masse négligeable, on peut supposer que la vitesse de propagation des ondes sonores y est très grande, et que la tension est pratiquement uniforme dans le fil.

Dans cette approximation, la tension est une fonction continue du temps. A l'instant $t = 0$, la tension est égale à Mg , où M est la masse de la butée.

La tension change à l'instant du choc. Pour connaître l'évolution ultérieure, il faut choisir un modèle de choc. Les cas limites sont

- le choc élastique au cours duquel il y a conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement ; dans ce cas, la bille rebondit sur la butée ;
- le choc mou après lequel la bille reste en contact sans rebondir sur la butée ; dans ce cas, il y a conservation de la quantité de mouvement, mais dissipation d'énergie au cours du choc.

Supposons le choc mou ; il y a conservation de l'énergie lors de la chute de la bille avant le choc ; la vitesse de m juste avant le choc est donc

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

La vitesse de l'ensemble bille-butée après le choc est

$$v_1 = \frac{m}{m+M} v_0 = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$$

L'élongation critique est δh^* telle que

$$\delta h^* = h \frac{T^*}{SY}$$

L'élongation avant le choc est

$$\delta h_0 = h \frac{Mg}{SY}$$

Pour une élongation $\delta h_0 + x \ll h$, la tension est $T(x)$ telle que

$$\delta h_0 + x = h \frac{T(x)}{SY}$$

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à l'ensemble bille-butée après le choc, on obtient

$$(M + m)\ddot{x} = -T(x) + (M + m)g$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{YS}{(M + m)h}x = g - \frac{YS}{(M + m)h}\delta h_0$$

et, en posant $\omega = \sqrt{\frac{YS}{(M + m)h}}$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_e$$

où x_e est la solution statique, telle que

$$T(x_e) = (M + m)g$$

Si $T(x_e) > T^*$, il y a rupture du fil, mais il peut aussi y avoir rupture même si $T(x_e) > T^*$. Il suffit en effet que $\delta h_0 + x$ dépasse δh^* . Or la solution générale de l'équation est

$$x = x_e + A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales

$$\begin{cases} x_e + A = 0 \\ B\omega = v_1 \end{cases}$$

soit

$$x = x_e(1 - \cos \omega t) + \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t$$

S'il n'y a pas rupture, il y a oscillation du système bille-butée avec une amplitude

$$\tilde{x} = \sqrt{x_e^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}}$$

Pour qu'il n'y ait pas rupture, il faut que l'élongation maximale reste inférieure à l'élongation critique.

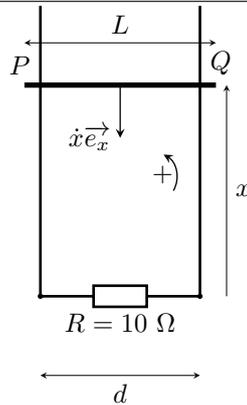
$$\delta h_0 + x_e + \tilde{x} < \delta h^*$$

Sinon, il y a rupture à l'abscisse x telle que

$$T(x) = T^*$$

2. Plan incliné avec champ magnétique

Un plan incliné est constitué de deux barres parallèles en cuivre faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. Les barres sont séparées d'une distance horizontale $d = 20$ cm. Elles sont reliées «en bas» par une résistance ohmique $R = 10 \Omega$. Un cylindre plein, de longueur $L = 35$ cm et de rayon $a = 1$ cm, également en cuivre, est posé sur les deux barres, en position horizontale. La masse volumique du cuivre est environ 9 g.cm^{-3} . Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme $B = 10$ T, dirigé selon l'axe vertical. A $t = 0$, on lâche le cylindre et on suppose qu'il y a toujours roulement sans glissement. Déterminer le mouvement du cylindre. Quelle serait sa vitesse limite v_∞ si les barres étaient infiniment longues? Après quel temps $t_{1/2}$ la vitesse du cylindre est égale à $v_\infty/2$?

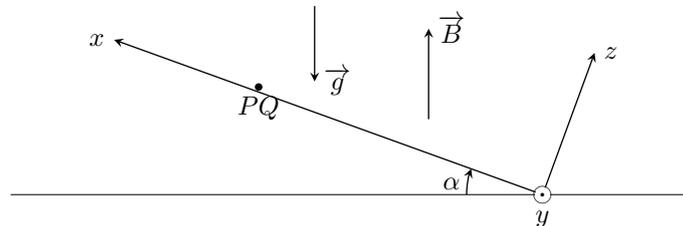


La barre se mettant en mouvement sous l'effet de son poids, il apparaît une force électromotrice d'induction

$$e = -\dot{\Phi} \text{ avec } \Phi = dxB \cos \alpha$$

On suppose que les résistances des rails et de la barre sont très inférieures à R . La loi des mailles s'écrit alors $e = Ri$, ce qui conduit à l'équation électrique

$$Ri = -d\dot{x}B \cos \alpha \quad (E)$$



La barre roule sans glisser ; sa vitesse angulaire est $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_y$ avec

$$\dot{x}\vec{e}_x = \omega \vec{e}_y \wedge a\vec{e}_z = a\omega \vec{e}_x \text{ soit } \vec{\Omega} = \frac{\dot{x}}{a}\vec{e}_y$$

La barre est soumise

- à son poids $\vec{P} = -mg(\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z)$
- à la réaction des rails $\vec{R} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_z$
- à la force de Laplace

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \int_{QP} i d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= i \vec{QP} \wedge B(\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z) \\ &= idB(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z) \end{aligned}$$

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_L$$

tandis que le théorème du moment cinétique au centre de masse de la barre s'écrit

$$J \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = -a\vec{e}_z \wedge \vec{R}$$

On obtient ainsi trois équations

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + idB \cos \alpha + T \\ 0 = -mg \cos \alpha - idB \sin \alpha + N \\ J \frac{\ddot{x}}{a} = -aT \end{cases}$$

En éliminant T entre la première et la troisième équation, on obtient l'équation mécanique

$$\left(m + \frac{J}{a^2}\right) \ddot{x} = -mg \sin \alpha + idB \cos \alpha \quad (M)$$

En éliminant i entre les équations (E) et (M), on obtient l'équation différentielle du mouvement

$$\left(m + \frac{J}{a^2}\right) \ddot{x} + \frac{d^2 B^2 \cos^2 \alpha}{R} \dot{x} = -mg \sin \alpha$$

Le moment d'inertie du cylindre étant $J = \frac{1}{2}ma^2$, on a

$$\ddot{x} + \frac{2d^2 B^2 \cos^2 \alpha}{3mR} \dot{x} = -\frac{2g \sin \alpha}{3}$$

Posons

$$\tau = \frac{3mR}{2d^2 B^2 \cos^2 \alpha} \text{ et } v_\infty = -\frac{2}{3}g\tau \sin \alpha$$

La vitesse $v = \dot{x}$ est solution de l'équation différentielle

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

de solution générale

$$v = v_\infty + Ae^{-t/\tau}$$

La condition initiale détermine la constante $A = -v_\infty$, soit

$$v = v_\infty(1 - e^{-t/\tau})$$

v_∞ serait la vitesse limite atteinte si les barres étaient infiniment longues. La vitesse du cylindre est égale à $v_\infty/2$ à la date $t_{1/2}$ telle que

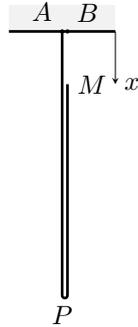
$$\frac{v_\infty}{2} = v_\infty(1 - e^{-t/\tau}) \text{ soit } t_{1/2} = \tau \ln 2$$

Numériquement, on obtient une masse $m = \rho\pi a^2 L \simeq 1 \text{ kg}$; on en déduit

$$v_\infty \simeq 65 \text{ m.s}^{-1} ; \tau \simeq 20 \text{ s} ; t_{1/2} \simeq 14 \text{ s}$$

3. Fil qui pend

On considère un fil pesant (câble) inextensible de masse linéique μ non-nulle de longueur L . Le câble est attaché par ses deux extrémités aux points A et B sur un plafond. A $t = 0$, l'extrémité en B se rompt ; calculer la tension au point A du fil. On supposera qu'à $t = 0$, la distance AB est faible par rapport à L .



L'étude cinématique est élémentaire : si on paramètre le système par l'abscisse du brin droit, la vitesse des points du brin droit est $\vec{v}_d = \dot{x}\vec{e}_x$, et celle des points du brin gauche est $\vec{v}_g = \vec{0}$.

Soit $m_g = \mu\ell_g = \mu\frac{L+x}{2}$ la masse du brin gauche et $m_d = \mu\ell_d = \mu\frac{L-x}{2}$ la masse du brin droit ; le centre de masse du système a pour abscisse

$$x_G = \frac{m_g \frac{\ell_g}{2} + m_d \left(x + \frac{\ell_d}{2}\right)}{m_g + m_d} = \frac{L^2 + 2Lx - x^2}{4L}$$

On peut vérifier que $x_G(x=0) = \frac{L}{4}$ et $x_G(x=L) = \frac{L}{2}$. La vitesse de G est

$$\dot{x}_G = \frac{L\dot{x} - x\dot{x}}{2L}$$

et son accélération est

$$\ddot{x}_G = \frac{L\ddot{x} - x\ddot{x} - \dot{x}^2}{2L}$$

Le système entier est soumis à deux forces : la tension \vec{T}_A et le poids $\vec{P} = \mu g L \vec{e}_x$; le théorème de la résultante cinétique pour le système entier donne

$$\vec{P} + \vec{T}_A = \mu L \ddot{x}_G \vec{e}_x$$

soit une équation pour deux inconnues : \vec{T}_A et \ddot{x}_G .

Première tentative : supposons que la force exercée par le brin gauche sur le brin droit est nulle ; le brin droit est alors en chute libre, son accélération est $\ddot{x} = g$; l'accélération du centre de masse est alors

$$\ddot{x}_G = \frac{g(L-x) - \dot{x}^2}{2L}$$

A l'instant 0, on a $x = 0$ et $\dot{x} = 0$, donc

$$\ddot{x}_G(0^+) = \frac{g}{2}$$

On en déduit que

$$\vec{T}_A(0^+) = \mu L \frac{g}{2} \vec{e}_x - \mu g L \vec{e}_x = -\mu \frac{gL}{2} \vec{e}_x$$

Il n'y a pas de contradiction manifeste, mais, l'extension de ce résultat à un instant $t \neq 0$ pose problème, car le brin gauche et le brin droit échangent de la matière, et ne sont ni l'un ni l'autre des systèmes fermés.

Seconde tentative : le système ayant un seul degré de liberté, on peut essayer une méthode énergétique, d'autant plus que les énergies cinétique et potentielle sont faciles à évaluer :

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m_d \dot{x}^2 = \frac{1}{4} \mu (L-x) \dot{x}^2 \\ E_p = E_0 - \mu L g x_G = E_0 - \frac{1}{4} \mu g (L^2 + 2Lx - x^2) \end{cases}$$

Le problème est ici qu'il n'y a pas conservation de l'énergie, car la puissance des efforts est non nulle. En effet, lorsqu'une masse dm passe du brin droit au brin gauche, elle subit un choc (discontinuité de vitesse) et son énergie cinétique passe de $\frac{1}{2}dm\dot{x}^2$ à 0. Pendant $[t, t + dt]$, on a $dm = \dot{m}_g dt = \frac{1}{2}\mu\dot{x}dt$; l'énergie cinétique dissipée pendant cet intervalle de temps est donc

$$dE_c = -\frac{1}{4}\mu\dot{x}^3 dt$$

La puissance des efforts intérieurs est donc

$$\mathcal{P}_{int} = -\frac{1}{4}\mu\dot{x}^3$$

Le théorème de l'énergie s'écrit

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = \mathcal{P}_{int}$$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement

$$\frac{1}{4}\mu(-\dot{x}^3 + 2(L-x)\dot{x}\ddot{x} - 2gL\dot{x} + 2gx\dot{x}) = -\frac{1}{4}\mu\dot{x}^3$$

Après simplification, on obtient

$$\ddot{x} = g$$

ce qui conforte l'hypothèse d'une chute libre du brin droit. On peut alors intégrer par rapport au temps : $\dot{x} = gt$ et $x = \frac{1}{2}gt^2$. On en déduit successivement

$$\ddot{x}_G = \frac{g\left(x - \frac{1}{2}gt^2\right) - g^2t^2}{2L} = \frac{g\left(x - \frac{3}{2}gt^2\right)}{2L}$$

et

$$\vec{T}_A = \mu L \frac{g\left(x - \frac{3}{2}gt^2\right)}{2L} \vec{e}_x - \mu L g \vec{e}_x = -\frac{1}{2}\mu\left(L + \frac{3}{2}gt^2\right) \vec{e}_x$$

On remarque que la norme de la tension est supérieure au poids du brin gauche.

4. Vitesses et pressions autour d'une aile d'avion

On considère l'aile d'un petit avion comme cylindrique, de rayon $a = 1$ m et de longueur $L \gg a$. L'avion vole à une faible vitesse constante $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 = 100$ km.h⁻¹.

1. Justifier que dans ces conditions on peut approximativement considérer l'air comme incompressible.
2. Calculer les champs des vitesses et des pressions dans l'approximation d'une aile infiniment longue. Quelle serait la force résultante par unité de longueur ?
3. Étudier le champ défini pour $x^2 + z^2 \geq a^2$ par

$$\vec{w}_\Gamma = \frac{\Gamma}{x^2 + z^2} (z \vec{e}_x - x \vec{e}_z)$$

et montrer que l'on peut ajouter un tel champ au champ des vitesses précédemment obtenu. Comment cela modifie la force résultante sur l'aile ?

1. La vitesse d'écoulement étant très inférieure à la célérité du son dans l'air, l'écoulement peut être considéré comme incompressible.
2. Dans le référentiel de l'aile, on doit avoir

$$\vec{v} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} v_0 \vec{e}_x$$

soit un potentiel des vitesses

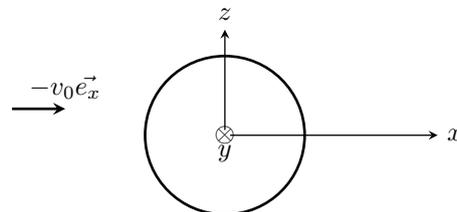
$$\phi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} v_0 x = v_0 r \cos \theta$$

tandis que, à la surface de l'aile, on doit avoir

$$\vec{v}(a, \theta) \wedge \vec{e}_r = 0$$

soit

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(a, \theta) = 0$$



Cherchons un écoulement dérivant du potentiel

$$\phi = v_0 r \cos \theta + \frac{A}{r} \cos \theta$$

En coordonnées cartésiennes, il s'écrit

$$\phi = v_0 x + \frac{Ax}{x^2 + z^2}$$

Les dérivées premières sont

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = v_0 - A \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = -A \frac{2xz}{(x^2 + z^2)^2} \end{cases}$$

et les dérivées secondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2Ax \frac{x^2 - 3z^2}{(x^2 + z^2)^3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2Ax \frac{x^2 - 3z^2}{(x^2 + z^2)^3} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\Delta \phi = 0$$

Le comportement est correct à l'infini ; à la surface de l'aile, on doit avoir

$$v_0 \cos \theta - \frac{A}{a^2} \cos \theta = 0$$

ce qui impose

$$A = v_0 a^2$$

On en déduit

$$\phi = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta$$

puis la vitesse en prenant le gradient

$$\vec{v} = v_0 \left(\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \vec{e}_r - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta \right)$$

Le théorème de Bernoulli permet alors de déterminer la pression à la surface de l'aile :

$$p(a, \theta) + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

soit

$$p(r, \theta) = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

Par symétrie, la somme des forces pressantes est donc nulle.

3. Le champ \vec{w}_Γ peut se réécrire en coordonnées cylindriques

$$\vec{w}_\Gamma = \frac{\Gamma}{r} \vec{e}_\theta$$

Ce champ est à divergence et à rotationnel nuls, mais sa circulation sur une courbe enlaçant l'aile est non nulle, en raison de la singularité sur l'axe Oy :

$$\oint_C \vec{w}_\Gamma \wedge d\vec{l} = 2\pi\Gamma$$

Le carré de la vitesse en $r = a$ devient

$$v^2 = \left(-2v_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{a} \right)^2 = 4v_0^2 \sin^2 \theta + \frac{\Gamma^2}{a^2} - \frac{4\Gamma v_0}{a} \sin \theta$$

ce qui conduit à la pression

$$p(a, \theta) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \left(1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{a^2} + \frac{4\Gamma v_0}{a} \sin \theta \right)$$

La somme des forces pressantes est ainsi

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} -p \vec{e}_r L a d\theta = \frac{1}{2} \rho \frac{4\Gamma v_0}{a} L a \int_0^{2\pi} \sin \theta \vec{e}_r d\theta$$

On exprime $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z$; on intègre sur θ et on obtient

$$\vec{F} = 2\pi \rho v_0 L \Gamma \vec{e}_z$$

Il s'agit d'une force de portance.

5. Tonneau percé

Un tonneau cylindrique de rayon R et de hauteur H est percé de trous. A une altitude z (à partir de sa base), les trous occupent une fraction $f(z)$ de la paroi du tonneau.

A quelle vitesse faut-il remplir le tonneau (en litre par seconde) pour réussir à le faire déborder ? On considérera l'eau comme un fluide parfait (sans viscosité) et incompressible.

A.N : $R = H = 1$ m, $f = 1\%$.

En un point d'altitude z , le débit est $v(z) = \sqrt{2g(H-z)}$ lorsque la surface libre est à l'altitude H , c'est-à-dire à la limite du débordement. Le débit sortant par les trous entre z et $z + dz$ est

$$dD_e = v(z)f(z)2\pi R dz$$

Le débit total d'éjection est donc, dans le cas limite :

$$\begin{aligned} D_{e \max} &= 2\pi R \int_0^H \sqrt{2g(H-z)} f(z) dz \\ &= 2\pi R \sqrt{2g} \int_0^H \sqrt{H-z} f(z) dz \end{aligned}$$

Pour $f(z) = 1/100$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{e \max} &= 2\pi R f \sqrt{2g} \int_0^H \sqrt{H-z} dz \\ &= 2\pi R f \sqrt{2g} \int_0^H \sqrt{u} du \\ &= \frac{4}{3} \pi R f \sqrt{2g} H^{3/2} \end{aligned}$$

Pour faire déborder le tonneau, il suffit de le remplir avec un débit supérieur à

$$D_{e \max} = \frac{4}{3} \pi \frac{1}{100} \sqrt{19,6} = 0,19 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

6. Étoile avec un moment dipolaire magnétique

Certains objets astrophysiques possèdent de forts champs magnétiques. Nous assimilerons un tel objet à une (très grande) masse ponctuelle M avec un moment dipolaire magnétique \vec{D}_m . On rappelle que le champ magnétique d'un tel dipôle est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{\vec{D}_m \wedge \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{D}_m}{r^3} \right)$$

avec $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ kg.m.C}^{-2}$. On s'intéresse aux trajectoires possibles d'un point matériel de masse $m \ll M$ et de charge électrique q dont la position initiale et vitesse initiale satisfont $\vec{r}(0) \wedge \vec{D}_m = 0$ et $\vec{v}(0) \wedge \vec{D}_m = 0$. On supposera $M = 10^{30} \text{ kg}$, $D_m = 10^{20} \text{ C.m}^2.\text{s}^{-1}$, $m = 10^5 \text{ kg}$, $q = 10^4 \text{ C}$. On donne la constante gravitationnelle $G \simeq 6,7 \times 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2}\text{m}^2$.

1. Montrer que l'effet des interactions électromagnétiques est faible sur une « période » si par exemple r reste de l'ordre de 10^4 km . Montrer que l'effet peut néanmoins être observable si il est cumulatif sur un grand nombre de « périodes ».

2. Déterminer explicitement les trajectoires liées possibles avec les hypothèses ci-dessus en ne retenant les effets électromagnétiques qu'au premier ordre en qD_m . Par quelle observation d'une telle trajectoire pourra-t-on déduire la valeur de qD_m ?

1. L'ordre de grandeur de la force magnétique est $F_{mag} \approx qvB$, soit une accélération $a_{mag} \approx \frac{qvB}{m}$. Ceci permet de définir une fréquence caractéristique (fréquence cyclotron associée)

$$\omega_c = \frac{qB}{2m} \quad (1)$$

et l'influence du champ magnétique sera faible sur une période T si $\omega_c T \ll 1$. Pour une trajectoire circulaire dans le champ gravitationnel, l'égalité entre la force gravitationnelle et la force centrifuge donne

$$\frac{GmM}{r^2} = mr \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \quad \text{soit } T = 2\pi \left(\frac{r^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (2)$$

(loi de Kepler)

Ici on trouve avec $r = 10^4 \text{ km}$ une période très courte de $T \simeq 25 \text{ s}$. On peut estimer le champ magnétique par

$$B \approx \frac{\mu_0 D}{4\pi r^3} \simeq 10^{-8} \text{ T}$$

et on en déduit une estimation de ω_c : $\omega_c = \frac{qB}{2m} \approx 5.10^{-10} \text{ s}^{-1}$ et donc $\omega_c T \approx 10^{-8} \ll 1$.

Clairement, sur une période, l'effet magnétique est minime, mais si cet effet est cumulatif sur un grand nombre de périodes, il pourra néanmoins être observable. Par exemple, sur une année il y a $N \approx 10^6$ périodes et un effet de $10^6 \times 10^{-8} = 10^{-2}$ est tout à fait observable.

2. La force magnétique ne travaillant pas, l'énergie E est conservée.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

La force est

$$\vec{F} = -GMm \frac{\vec{r}}{r^3} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (3)$$

La force magnétique n'étant pas centrale, le moment cinétique n'est pas conservé :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = q\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B}) = q \left((\vec{r} \wedge \vec{B})\vec{v} - (\vec{r} \wedge \vec{v})\vec{B} \right) \quad (4)$$

Néanmoins, ici, les conditions initiales sont telles que le vecteur position $\vec{r}(0)$ et la vitesse $\vec{v}(0)$ sont dans le plan orthogonal à \vec{D}_m . Donc $\vec{B}(\vec{r}(0))$ est parallèle à \vec{D}_m . La force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et donc aussi l'accélération sont dans le plan orthogonal à \vec{D}_m . Par conséquent, \vec{r} reste dans ce plan orthogonal à \vec{D}_m pour tout t , et $\vec{B}(\vec{r})$ reste parallèle à \vec{D}_m . Donc $\vec{r} \wedge \vec{B} = 0$ à tout t . Le mouvement est plan et on utilisera des coordonnées r et φ dans ce plan. L'équation (4) donne alors

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r} \wedge \vec{v}) = -qr\dot{\varphi}\vec{B}$$

soit en projetant

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{qB}{m}r\dot{r} \text{ soit } \frac{d}{dt}(r^2(\dot{\varphi} - \omega_c(r))) = 0 \quad (5)$$

Ici, $\omega_c(r)$ est donné par (1) mais avec $B = B(r) = \frac{\mu_0 D_m}{4\pi r^3}$. Donc $r^2(\dot{\varphi} - \omega_c(r)) = l$ est constant. C'est cette relation qui remplace la loi des aires habituelles. On a

$$r^2\dot{\varphi} - \frac{\alpha}{r} = l, \alpha = \frac{\mu_0 q D_m}{8\pi m} \text{ soit } \dot{\varphi} = \frac{l}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3} \quad (6)$$

que l'on reporte dans l'équation de la conservation de l'énergie :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{GM}{r} \quad (7)$$

La suite est assez standard : puisqu'on veut la trajectoire $r(\varphi)$, on écrit $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{d\varphi} \equiv \dot{\varphi}r'$ et avec $u = \frac{1}{r}$ on obtient

$$(u')^2 + u^2 = \frac{2}{l^2} \left(\frac{E}{m} + GMu \right) \left(1 + \frac{\alpha}{l}u \right)^{-2} \quad (8)$$

Cette équation est compliquée à résoudre sauf si on peut faire le développement limité

$$\left(1 + \frac{\alpha}{l}u \right)^{-2} \simeq 1 - \frac{2\alpha}{l}u$$

On a

$$\frac{\alpha}{l}u = \frac{\mu_0 q D_m}{8\pi m l r} \simeq \frac{\mu_0 q D_m}{8\pi m \dot{\varphi} r^3} = \frac{qB}{2m\dot{\varphi}} = \frac{\omega_c}{\dot{\varphi}} \simeq \frac{\omega_c T}{2\pi} \ll 1$$

d'après la discussion ci-dessus. L'équation (8) donne alors

$$(u')^2 + u^2 = \frac{2}{l^2} \left(\frac{E}{m} + GMu \right) \left(1 - \frac{2\alpha}{l}u \right) \quad (9)$$

soit

$$(u')^2 + \left(1 + \frac{4\alpha GM}{l^3} \right) u^2 - 2 \left(\frac{GM}{l^2} - \frac{2E\alpha}{ml^3} \right) u = \frac{2E}{ml^2} \quad (10)$$

Ceci est de la forme $(u')^2 + Au^2 - 2Bu = C$ et donc $(u')^2 + A \left(u - \frac{B}{A} \right)^2 = C + \frac{B^2}{A}$ avec solution

$$u = \frac{B}{A} + \sqrt{\frac{C}{A} + \frac{B^2}{A^2}} \cos \left(\sqrt{A}(\varphi - \varphi_0) \right) \quad (11)$$

u est périodique en φ , mais avec une période $\frac{2\pi}{\sqrt{A}} \simeq 2\pi \left(1 - \frac{2\alpha GM}{l^3} \right)$. Pour $\alpha = 0$, on retrouve, bien sûr, l'ellipse. Pour α non-nul, mais petit, on trouve que la valeur de φ pour laquelle $u = 1/r$ est minimal (ou maximal) se décale sur une « période » de $\Delta\varphi = \frac{4\pi\alpha GM}{l^3}$. Cet effet est bien cumulatif et donc facilement observable après un grand nombre de « périodes ». Notons que d'après (6), $l \simeq r^2\dot{\varphi}$ est facile à mesurer en observant la trajectoire.

7. Cosmonaute sur astéroïde

Un cosmonaute échoué sur un astéroïde de rayon R et de même densité que la terre parvient à s'en échapper en sautant en l'air. Quelle est la valeur maximale de R ?

Si m désigne la masse du cosmonaute, et $M = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$ celle de l'astéroïde, l'énergie potentielle du cosmonaute au niveau du sol est

$$E_p = -\frac{GMm}{R}$$

Pour échapper à l'attraction de l'astéroïde, il faut donner une impulsion correspondant à une énergie cinétique $\frac{1}{2}mv_0^2$ telle que

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + E_p > 0 \text{ soit, à la limite } \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{GM}{R} = \frac{4\pi}{3}\rho GR^2$$

L'ordre de grandeur de la vitesse initiale maximale peut être évaluée en exprimant que sur la Terre, on peut effectuer au plus des bonds de l'ordre de $\Delta h = 2$ m, ce qui conduit à

$$\frac{1}{2}v_0^2 = g\Delta h$$

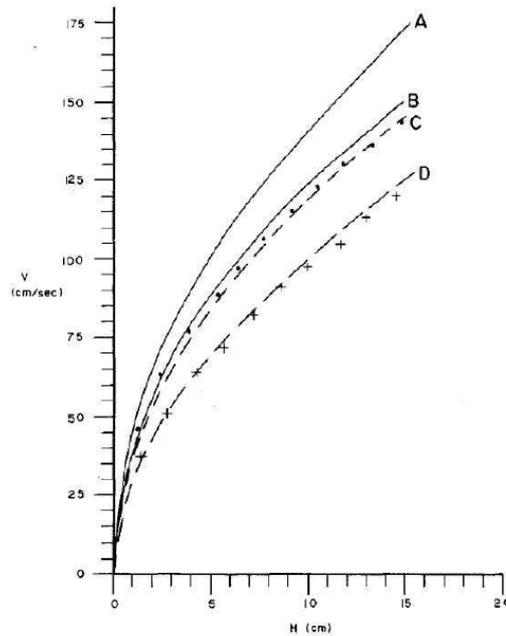
En identifiant les deux énergies cinétiques massiques, on obtient

$$g\Delta h = \frac{4\pi}{3}\rho GR^2 \text{ soit } R = \sqrt{\frac{3g\Delta h}{4\pi\rho G}}$$

En prenant $\rho \simeq 3.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, on obtient

$$R \simeq 5 \text{ km}$$

8. Sphère roulant dans une rainure

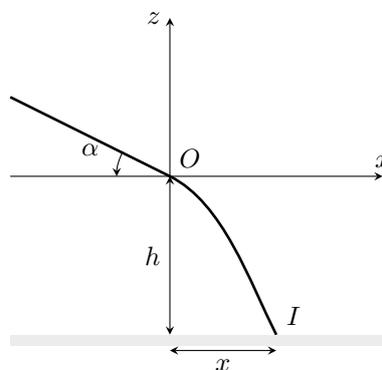


Une sphère de rayon R et de masse m roule dans une rainure de largeur w posée sur un plan incliné, puis quitte le plan en chute libre pour tomber dans un bac de sable situé plus bas.

On mesure la distance au plan x en fonction du rayon de la sphère et on en déduit la vitesse de la sphère v lorsqu'elle quitte le plan.

1. Donner une relation entre x et v .
2. Les courbes A et B ci-dessus correspondent respectivement à la vitesse finale d'un mouvement de glissement pur et de roulement pur d'une sphère (moment d'inertie par rapport l'axe $I = 2/5mR^2$). Donner l'expression de ces courbes.
3. Les courbes C et D ci-dessus correspondent aux mesures de la vitesse finale d'un mouvement de roulement sans glissement dans une rainure de largeur $w = 1$ cm, pour des sphères de rayon $R = 0,633$ cm et $R = 1,9$ cm. Pourquoi la vitesse dépend-t-elle du rayon ? Quelle courbe correspond à quel rayon ?
4. Donner l'expression générale de la vitesse pour un rayon quelconque. Quelle est la condition pour avoir un mouvement sans glissement ?

1. Soit α l'inclinaison du plan par rapport à l'horizontale.



Si on appelle x la distance horizontale parcourue par la sphère entre l'instant où elle quitte le plan incliné et l'instant d'impact sur le bac à sable, on obtient, en notant h la hauteur de chute libre :

$$\begin{cases} z = h + vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = vt \cos \alpha \end{cases}$$

L'impact a lieu à l'instant t_I tel que

$$0 = h + vt_I \sin \alpha - \frac{1}{2}gt_I^2$$

soit

$$t_I = \frac{v \sin \alpha}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \alpha}} \right)$$

On a donc

$$x = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \alpha}} \right)$$

2. Pour un glissement pur, l'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$; si H est la dénivellation lors du parcours sur le plan incliné, la conservation de l'énergie conduit à

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 \text{ soit } v = \sqrt{2gH}$$

On vérifie que le calcul donne; pour $H = 10$ cm, une vitesse $v = 140$ cm/s, en accord avec la vitesse lue sur la courbe A.

Dans le cas d'un roulement sans glissement, la vitesse angulaire est $\Omega = \frac{v}{R}$, ce qui conduit à l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

La conservation de l'énergie conduit cette fois à

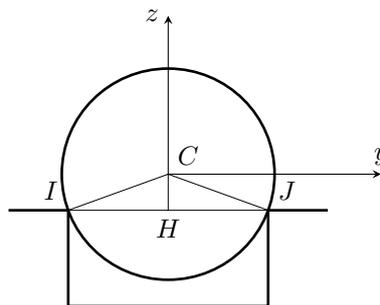
$$mgH = \frac{7}{10}mv^2 \text{ soit } v = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$

On vérifie que le calcul donne pour $H = 10$ cm, une vitesse $v = 120$ cm/s, en accord avec la vitesse lue sur la courbe B.

3. Lorsque la largeur w est faible devant le diamètre $2R$, la rainure n'a pratiquement que pour effet de guider la sphère, qui tourne pratiquement à la même vitesse que dans le cas du roulement pur sur le plan incliné. En revanche, quand le diamètre s'approche de la largeur de la rayure, la vitesse angulaire est plus grande, pour une vitesse donnée du centre de masse. On en déduit que

- $R = 1,9$ cm correspond à la courbe C;
- $R = 0,633$ cm correspond à la courbe D.

4. Soit C le centre de la sphère. Notons $a = CH = \sqrt{R^2 - \frac{w^2}{4}}$.



La droite IJ est l'axe instantané de rotation de la sphère, donc la vitesse angulaire est $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_y$; la relation de transport s'écrit alors

$$\vec{v}_C = \vec{v}_I + \vec{\Omega} \wedge \vec{IC} = \vec{0} + \Omega \vec{e}_y \wedge \left(\frac{w}{2} \vec{e}_y + a \vec{e}_z \right) = a\Omega \vec{e}_x$$

On en déduit que $\Omega^2 = \frac{v^2}{R^2 - \frac{w^2}{4}}$ ce qui conduit à

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2 \frac{v^2}{R^2 - \frac{w^2}{4}} = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{2}{5 \left(1 - \frac{w^2}{4R^2} \right)} \right)$$

La conservation de l'énergie s'écrit

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{2}{5 \left(1 - \frac{w^2}{4R^2} \right)} \right)$$

ce qui conduit à la vitesse

$$v = \sqrt{10gH \frac{1 - \frac{w^2}{4R^2}}{7 - \frac{w^2}{2R^2}}}$$

Pour $R = 1,9$ cm, on obtient $v = 115$ cm/s, et pour $R = 0,633$ cm, on obtient $v = 80$ cm/s, ce qui est en accord avec les courbes fournies.

Pour qu'il n'y ait pas de glissement, il faut que le coefficient de frottement f soit suffisant pour que la composante tangentielle T_I et la composante normale N_I au point I soient telles que

$$|T_I| < f|N_I|$$

Par symétrie, si cette condition est réalisée en I , elle le sera aussi en J si les états de surface sont les mêmes sur les deux arêtes de la rainure.

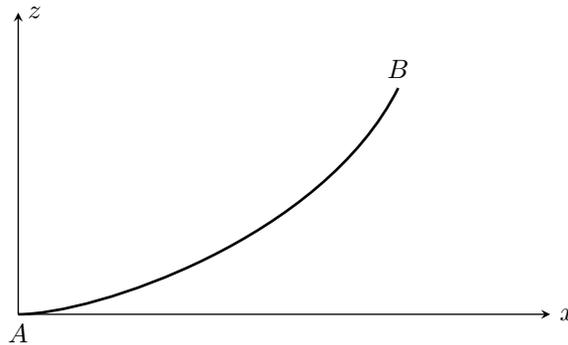
9. Corde suspendue

Une corde sans raideur, de longueur L et de masse linéique μ est suspendue entre deux points A et B , tels que $x_B - x_A = d > 0$ et $z_B - z_A = h > 0$. (Evidemment, $L^2 > d^2 + h^2$.) On appelle θ_0 et θ_1 les angles que fait la corde avec le vecteur \vec{e}_z en A et B . Déterminer la forme de la corde $\theta(\ell)$ (où $\ell \in [0, L]$ est le paramètre naturel le long de la corde) en fonction de d et h que l'on reliera à θ_0 et θ_1 . En particulier on déterminera $\frac{h}{L}$ et $\frac{d}{L}$ pour que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

On donne

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} \text{ et } \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right)$$

On peut choisir le point A comme point origine ; l'allure de la corde est alors représentée ci-dessous.



Soit $\vec{T}(\ell)$ la force exercée par le tronçon d'abscisse curviligne supérieure à ℓ sur le tronçon d'abscisse curviligne inférieure à ℓ .

La condition d'équilibre du tronçon $[\ell, \ell + \Delta\ell]$ s'écrit

$$\vec{T}(\ell + \Delta\ell) - \vec{T}(\ell) - \mu g \Delta\ell \vec{e}_z = \vec{0}$$

soit, en divisant par $\Delta\ell$ puis en effectuant le passage à la limite $\Delta\ell \rightarrow 0$:

$$\frac{d\vec{T}}{d\ell} = \mu g \vec{e}_z$$

En projetant sur les deux axes du plan de la corde, on obtient

$$\begin{cases} \frac{d(T(\ell) \sin \theta(\ell))}{d\ell} = 0 \\ \frac{d(T(\ell) \cos \theta(\ell))}{d\ell} = \mu g \end{cases}$$

En intégrant la première équation, on obtient, en introduisant une constante d'intégration T_0 :

$$T(\ell) = \frac{T_0}{\sin \theta}$$

En substituant le résultat dans la seconde équation, on obtient

$$\frac{d}{d\ell} \left(\frac{1}{\tan \theta} \right) = \frac{\mu g}{T_0}$$

En intégrant entre 0 et ℓ , on obtient

$$\frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{\tan \theta_0} = \frac{\mu g \ell}{T_0}$$

ce qui détermine la forme $\theta(\ell)$ de la corde.

Dans le cas particulier $\ell = L$, on obtient

$$\frac{1}{\tan \theta_1} - \frac{1}{\tan \theta_0} = \frac{\mu g L}{T_0}$$

L'écart horizontal entre A et B est tel que

$$\begin{aligned} d &= \int_{x_A}^{x_B} dx \\ &= \int_0^L \sin \theta d\ell \\ &= -\frac{T_0}{\mu g} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{\sin \theta} d\theta \\ &= -\frac{T_0}{\mu g} \ln \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right) \end{aligned}$$

L'écart vertical entre A et B est tel que

$$\begin{aligned} h &= \int_{z_A}^{z_B} dz \\ &= \int_0^L \cos \theta d\ell \\ &= -\frac{T_0}{\mu g} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \\ &= -\frac{T_0}{\mu g} \int_{\sin \theta_0}^{\sin \theta_1} \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{T_0}{\mu g} \left[\frac{1}{u} \right]_{\sin \theta_0}^{\sin \theta_1} \\ &= \frac{T_0}{\mu g} \left(\frac{1}{\sin \theta_1} - \frac{1}{\sin \theta_0} \right) \end{aligned}$$

Pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, on obtient

$$\begin{cases} L = \frac{T_0}{\mu g} \\ d = -\frac{T_0}{\mu g} \ln \left(\tan \frac{\pi}{8} \right) \\ L = \frac{T_0}{\mu g} (\sqrt{2} - 1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{d}{L} = \ln \left(\tan \frac{\pi}{8} \right) \simeq 0,88 \\ \frac{h}{L} = \sqrt{2} - 1 \simeq 0,41 \end{cases}$$

10. Thermo-cube

Soit un système thermodynamique satisfaisant la relation suivante entre son entropie S , son énergie interne U , son volume V , et le nombre de particules N :

$$S = A(NVU)^{1/3} \quad (1)$$

On admettra que l'identité thermodynamique fondamentale, pour N variable, devient

$$dU = Td - PdV + \mu dN$$

1. a) Déterminer une relation entre U, N, V , et la température T .
- b) Déterminer une relation entre la pression P , et N, V, T .
- c) Déterminer la capacité calorifique à volume constant c_v .

2. Deux corps identiques satisfaisant la relation Eq. (1), de même volume et nombre de particules, sont initialement à des températures T_1 et T_2 . On les utilise comme source de travail jusqu'à les amener à une température constante T_f . Ce processus est réalisé en extrayant de la chaleur du corps le plus chaud et en transférant une partie au corps le plus froid, le reste apparaissant comme travail.

- a) Déterminer la gamme possible de température finale.
- b) Quelle température correspond au travail maximum délivré, et quel est ce travail maximum ?

1. a) A partir de l'équation (1), on peut écrire l'expression de $U(S, V, N)$:

$$S = A(NVU)^{1/3} \text{ donne } U = \frac{1}{A^3} \frac{S^3}{NV}$$

L'identité thermodynamique fondamentale

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

permet d'en déduire la température

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} \\ &= \frac{3S^2}{A^3 NV} \\ &= \frac{3A^3 NV}{3A^2 (NVU)^{2/3}} \\ &= \frac{A^3 NV}{\left(\frac{U^2}{NV} \right)^{1/3}} \\ &= \frac{3}{A} \left(\frac{U^2}{NV} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

- b) La même identité thermodynamique fondamentale permet de déterminer la pression

$$\begin{aligned} P &= - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} \\ &= \frac{S^3}{A^3 NV^2} \\ &= \frac{A^3 NVU}{A^3 NV^2} \\ &= \left(\frac{U}{V} \right) \end{aligned}$$

En reprenant l'expression de la température établi à la première question, on peut exprimer $U(T, V, N)$; on obtient successivement :

$$T^3 = \frac{27}{A^3} \frac{U^2}{NV} \text{ soit } U^2 = \frac{A^3 T^3 NV}{27}$$

puis

$$U = \frac{A^{2/3}}{3\sqrt{3}} (NVT^3)^{1/2}$$

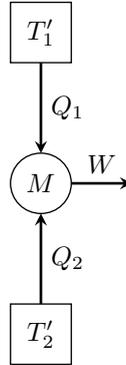
En remplaçant U par cette expression dans P , on obtient

$$P = \frac{A^{2/3}}{3\sqrt{3}} \left(\frac{NT^3}{V} \right)^{1/2}$$

c) La capacité thermique se calcule par dérivation de $U(T, V, N)$:

$$\begin{aligned} c_v &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, N} \\ &= \frac{A^{2/3}}{3\sqrt{3}} (NV)^{1/2} \frac{3}{2} T^{1/2} \\ &= \frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NVT} \end{aligned}$$

2. a) Soit une machine cyclique fonctionnant entre les sources de températures $T'_1 \in [T_1, T_f]$ et $T_2 \in [T_f, T_1]$.



En considérant que T'_i varie peu sur un cycle, les deux principes de la thermodynamique peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \delta Q_1 + \delta Q_2 - \delta W = 0 \\ \frac{\delta Q_1}{T'_1} + \frac{\delta Q_2}{T'_2} + \delta S_c = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \delta Q_1 = -c_v dT'_1 = -\frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NVT'_1}^{1/2} dT'_1 \\ \delta Q_2 = -c_v dT'_2 = -\frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NVT'_2}^{1/2} dT'_2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} -\frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NVT'_1}^{1/2} dT'_1 - \frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NVT'_2}^{1/2} dT'_2 - \delta W = 0 \\ -\frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NVT'_1}^{-1/2} dT'_1 - \frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NVT'_2}^{-1/2} dT'_2 + \delta S_c = 0 \end{cases}$$

et, en intégrant

$$\begin{cases} -\frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NV} \int_{T'_1}^{T_f} T_1^{1/2} dT'_1 - \frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NV} \int_{T_2}^{T_f} T_2^{1/2} dT'_2 - W = 0 \\ -\frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NV} \int_{T_1}^{T_f} T_1^{-1/2} dT'_1 - \frac{A^{2/3}}{2\sqrt{3}} \sqrt{NV} \int_{T_1}^{T_f} T_2^{-1/2} dT'_2 + S_c = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \frac{A^{2/3}}{3\sqrt{3}} \sqrt{NV} (2T_f^{3/2} - T_1^{3/2} - T_2^{3/2}) + W = 0 \\ \frac{A^{2/3}}{\sqrt{3}} \sqrt{NV} (2T_f^{1/2} - T_1^{1/2} - T_2^{1/2}) - S_c = 0 \end{cases}$$

La température finale est minimale pour $S_c = 0$, soit

$$T_{f \min} = \left(\frac{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}{2} \right)^2$$

La température finale est maximale pour $W = 0$, soit

$$T_{f \max} = \left(\frac{T_1^{3/2} + T_2^{3/2}}{2} \right)^{2/3}$$

b) Le travail maximal correspond à la température finale minimale, soit

$$W_{\max} = \frac{A^{2/3}}{3\sqrt{3}} \sqrt{NV} (T_1^{3/2} + T_2^{3/2} - 2T_{f \min}^{3/2})$$

11. Fusible

Un fil métallique de conductivité σ et rayon r_0 , de longueur L , est parcouru d'un courant électrique constant I . Le fil se trouve le long de l'axe d'un récipient cylindrique de rayon R_0 et même longueur L .

Ce récipient est rempli d'un liquide isolant électriquement. Les parois du cylindre sont maintenues à une température T_∞ . On suppose $r_0 \ll R_0 \ll L$.

Déterminer la température dans le fil. Pour une température de fusion T_F du métal donné, expliciter le lien entre I_{max} et r_0 de ce "fusible".

Notons ρ la résistivité du fil, λ la conductivité thermique du fil et λ' la conductivité thermique du liquide. Le champ de température est radial et la densité de courant thermique dans le liquide peut se mettre sous la forme

$$\vec{j}_Q = -\lambda' T'(r) \vec{e}_r$$

En régime permanent, la puissance dissipée par effet Joule dans un tronçon de longueur h de fil doit être évacuée à travers une surface cylindrique d'aire $2\pi r h$, soit

$$\rho \frac{h}{\pi r_0^2} I^2 = 2\pi r h j_Q(r)$$

On en déduit que

$$T'(r) = -\frac{\rho I^2}{2\pi^2 \lambda' r_0^2} \frac{1}{r}$$

ce qui conduit, après intégration, à

$$T(r) - T(r_0) = \frac{\rho I^2}{2\pi^2 \lambda' r_0^2} \ln \frac{r}{r_0}$$

Ce résultat est valable pour $r \in [r_0, R_0]$. En particulier

$$T_\infty - T(r_0) = \frac{\rho I^2}{2\pi^2 \lambda' r_0^2} \ln \frac{R_0}{r_0}$$

A l'intérieur du fil, la densité de courant thermique peut se mettre sous la forme

$$\vec{j}_Q = -\lambda T'(r) \vec{e}_r$$

En régime permanent, la puissance dissipée par effet Joule dans un tronçon de longueur h de fil et de rayon r doit être évacuée à travers une surface cylindrique d'aire $2\pi r h$, soit

$$\rho \frac{h}{\pi r^2} i^2 = 2\pi r h j_Q(r) \text{ avec } i = I \frac{r^2}{r_0^2}$$

soit

$$\rho \frac{h r^2}{\pi r_0^4} i^2 = 2\pi r h j_Q(r)$$

On en déduit que

$$T'(r) = -\frac{\rho r I^2}{2\pi^2 \lambda r_0^2}$$

soit, en intégrant

$$T(r) - T(r_0) = \frac{\rho I^2}{4\pi^2 \lambda r_0^2} (r_0^2 - r^2)$$

Dans le cas limite de la fusion, $T(r_0) = T_F$ et $I = I_{max}$, donc

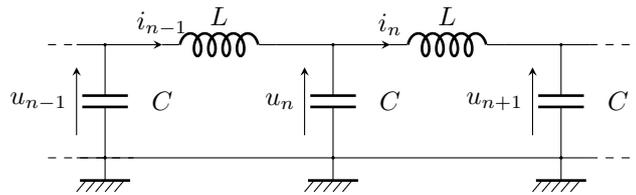
$$T_\infty - T_F = \frac{\rho I_{max}^2}{2\pi^2 \lambda' r_0^2} \ln \frac{R_0}{r_0}$$

soit finalement

$$I_{max} = \pi r_0 \sqrt{\frac{2\lambda'}{\rho \ln \frac{R_0}{r_0}} (T_\infty - T_F)}$$

12. Transmission le long d'un réseau LC

Considérons la ligne de transmission dessinée ci-dessous :



Déterminer la relation de dispersion pour une onde périodique traversant la ligne.

Quelle est la fréquence de coupure ?

L'écriture de la loi des mailles et de la loi des noeuds donne successivement

$$\begin{cases} \underline{u}_n = jL\omega \underline{i}_n + \underline{u}_{n+1} \\ \underline{i}_{n-1} = jC\omega \underline{u}_n + \underline{i}_n \end{cases}$$

En réécrivant la première équation au rang $n - 1$, on obtient

$$\underline{u}_{n-1} = jL\omega \underline{i}_{n-1} + \underline{u}_n$$

ce qui donne, en soustrayant membre l'équation au rang $n - 1$ à l'équation au rang n :

$$\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1} = jL\omega(\underline{i}_n - \underline{i}_{n-1}) + \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n$$

soit, compte tenu de la loi des noeuds :

$$\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1} = -jL\omega(jC\omega \underline{u}_n) + \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n$$

et, en ordonnant :

$$(2 - LC\omega^2)\underline{u}_n = \underline{u}_{n+1} + \underline{u}_{n-1}$$

Cherchons une solution de la forme

$$\underline{u}_n = e^{j(\omega t - kna)}$$

où k est le vecteur d'onde et a la longueur d'une cellule. On peut écrire

$$\underline{u}_{n+1} = e^{-jka} \underline{u}_n \text{ et } \underline{u}_{n-1} = e^{+jka} \underline{u}_n$$

La relation de récurrence devient

$$2 - LC\omega^2 = e^{-jka} + e^{+jka} \text{ soit } 2 - LC\omega^2 = 2 \cos ka$$

que l'on peut réécrire

$$LC\omega^2 = 2(1 - \cos ka) = 4 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

En se limitant à des ondes progressives dans le sens des n croissants, on obtient

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{ka}{2}$$

ce qui fait apparaître une fréquence de coupure $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$; la bande passante est l'intervalle $[0, \omega_c]$.

13. Trafic routier

On cherche à modéliser des embouteillages.

1. Le flux de voitures est noté j (nombre de voitures par unité de temps) et leur densité n (nombre de voiture par unité de longueur). Soit v la vitesse des voitures au point considéré. Quelle est la relation entre j et n ?

2. a) Modèle 1 : la distance entre deux voitures est supérieure ou égale à $l_0 + v\tau$; la vitesse est inférieure ou égale à v_{max} . Tracer le diagramme $j = f(n)$.

b) Modèle 2 : $v = v_{max} \left(1 - \frac{n}{n_{max}}\right)$. Tracer à nouveau le diagramme dans ce modèle.

3. Trouver l'équation d'onde de n .

4. On a un bouchon en forme de courbe de dosage (avec un trafic congestionné, donc dj/dn est négatif partout).

a) Comment évolue la situation dans le modèle 1 ?

b) Comment évolue la situation dans le modèle 2 ?

1. $j = nv$

2. a) Modèle 1 : la distance entre deux voitures est supérieure ou égale à $l_0 + v\tau$; la vitesse est inférieure ou égale à v_{max} . La densité est l'inverse de la distance entre deux voitures. La densité maximale est $1/l_0$; pour cette densité, la vitesse est nulle; le flux est donc nul.

Lorsque la distance entre deux voitures est supérieure à $l_0 + v_{max}\tau$, la vitesse peut être égale à v_{max} ; on a alors

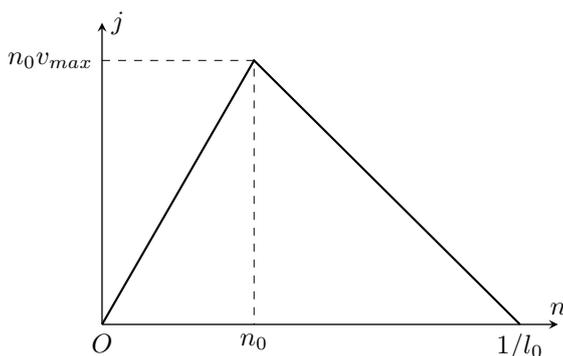
$$j = nv_{max}$$

Cette expression est valable pour $0 < n < \frac{1}{l_0 + v_{max}\tau}$; lorsque $n > \frac{1}{l_0 + v_{max}\tau}$, la vitesse décroît avec n selon la loi

$$v = \frac{\frac{1}{n} - l_0}{\tau}$$

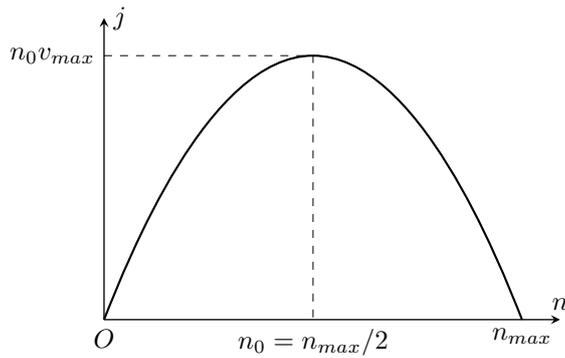
Dans ce domaine, on a

$$j = \frac{1 - nl_0}{\tau}$$



b) Modèle 2 : $v = v_{max} \left(1 - \frac{n}{n_{max}}\right)$. Dans ce modèle, le flux est

$$j = nv_{max} \left(1 - \frac{n}{n_{max}}\right)$$



3. On effectue le bilan sur une tranche entre x et $x + dx$ pendant $[t, t + dt]$; on obtient

$$\partial n \partial t \partial x = (j(x) - j(x + dx)) \partial t$$

soit

$$\partial n \partial t + \partial j \partial x = 0$$

En écrivant que

$$\partial j \partial x = \frac{dj}{dn} \partial n \partial x$$

on obtient, en notant $c = -\frac{dj}{dn} > 0$

$$\partial n \partial t = c \partial n \partial x$$

On obtient l'équation d'une onde progressive dans le sens des x décroissants.

4. On a un bouchon en forme de courbe de dosage (avec un trafic congestionné, donc dj/dn est négatif partout.

a) Dans le modèle 1, c est une constante : $c = \frac{n_0 v_{max}}{\frac{1}{l_0} - n_0}$. Le profil du bouchon se conserve en se translatant dans le sens

des x décroissants à la vitesse c .

b) Dans le modèle 2, $c = v_{max} \left(\frac{2n}{n_{max}} - 1 \right)$. La célérité dépend de n . Les zones de haute densité se propagent plus vite que les zones de faible densité. Le bouchon se propage en devenant de plus en plus brutal.

14. Chaîne d'atomes

I. Soit une chaîne d'atomes espacés de a (entre leurs positions d'équilibre) repérés par l'écart u_n à leur position d'équilibre. L'atome 0 a une masse M_0 . Les autres ($n < 0$ et $n > 0$) une masse $M > M_0$. On donne le potentiel d'interaction entre deux atomes voisins

$$V_{n,n+1} = \frac{1}{2}\alpha(u_{n+1} - u_n)^2$$

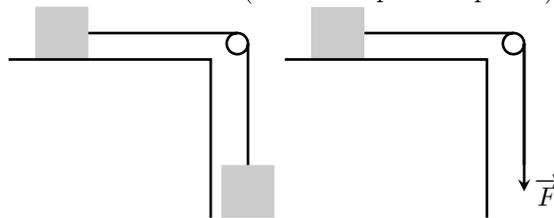
1. Ecrire les équations de la mécanique pour $n = 0, 1$.

2. Montrer qu'une solution de la forme

$$u_n(t) = A \exp(-b|n|a) \exp(i(k|n|a - \omega t))$$

convient. Calculer b et k . Calculer ω en fonction de $\omega_c = \sqrt{2\alpha/M}$, M et M_0 .

II. Quelle est la différence entre les vitesses d'un bloc de 10 kg tiré par un bloc de 10 kg en chute libre relié par une poulie, et un bloc de 10 kg tiré par une force de 100 N (idem relié par une poulie).



I. Chaîne d'atomes

1. En prenant comme système l'atome 0, on obtient

$$M_0 \ddot{u}_0 = \alpha(u_1 + u_{-1} - 2u_0)$$

En prenant comme système l'atome 1, on obtient

$$M \ddot{u}_1 = \alpha(u_2 + u_0 - 2u_1)$$

Cette dernière équation se généralise à

$$M \ddot{u}_n = \alpha(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad \text{pour } n \neq 0$$

2. Le système est une chaîne d'atomes identiques dans laquelle est intercalée une impureté en $n = 0$. La solution proposée est une onde progressive harmonique amortie se propageant depuis l'atome 0 vers l'infini.

Posons $\eta = \frac{M_0}{M}$ et $\epsilon = e^{-ba}$.

— pour $n = 0$, on obtient

$$\begin{cases} u_1 = \epsilon e^{ika} u_0 \\ u_{-1} = \epsilon e^{ika} u_0 \end{cases}$$

soit, en reportant dans l'équation différentielle :

$$-\eta M \omega^2 = \alpha(2\epsilon e^{ika} - 2)$$

et, en introduisant la pulsation de coupure ω_c :

$$\eta \omega^2 = \omega_c^2 (1 - \epsilon e^{ika})$$

On en déduit les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \eta \omega^2 = \omega_c^2 (1 - \epsilon \cos ka) \\ 0 = -\omega_c^2 \epsilon \sin ka \end{cases}$$

ce qui conduit

— soit à $\epsilon = 0$

- soit à $\sin ka = 0$
- pour $n \neq 0$, on obtient

$$\begin{cases} u_{n+1} = \epsilon e^{ika} u_n \\ u_{n-1} = \frac{1}{\epsilon} e^{-ika} u_n \end{cases}$$

soit, en reportant dans l'équation différentielle :

$$-M\omega^2 = \alpha \left(\epsilon e^{ika} + \frac{1}{\epsilon} e^{-ika} - 2 \right)$$

et, en introduisant la pulsation de coupure ω_c :

$$2\omega^2 = \omega_c^2 \left(2 - \epsilon e^{ika} - \frac{1}{\epsilon} e^{-ika} \right)$$

On en déduit les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 2\omega^2 = \omega_c^2 \left(2 - \left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \right) \cos ka \right) \\ 0 = \omega_c^2 \left(0 - \left(\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \right) \sin ka \right) \end{cases}$$

La seconde équation se réduit à

$$\left(\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \right) \sin ka = 0$$

ce qui conduit

- soit à $\epsilon = 1$
- soit à $\sin ka = 0$

On en déduit que $\sin ka = 0$, et donc que $\cos ka = \pm 1$.

En faisant le quotient des équations correspondant aux parties réelles, on obtient

$$\frac{\eta}{2} = \frac{1 - \epsilon \cos ka}{2 - \left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \right) \cos ka}$$

soit une équation du second degré en ϵ :

$$\epsilon^2(2 - \eta) \cos ka + 2(\eta - 1) - \eta \cos ka = 0$$

La solution acceptable est

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{\eta}{2 - \eta} & \text{si } \cos ka = -1 \\ \epsilon = \frac{\eta}{\eta - 2} & \text{si } \cos ka = +1 \end{cases}$$

Dans le premier cas, qui suppose que $\frac{M_0}{M} < 2$, on obtient

$$\omega^2 = \frac{2\omega_c^2}{\eta(2 - \eta)}$$

Dans le second cas, qui suppose que $\frac{M_0}{M} > 2$, on obtient

$$\omega^2 = \frac{2\omega_c^2}{\eta(2 - \eta)}$$

ce qui est impossible.

II. Mécanique générale

Le système possède un seul degré de liberté, si le fil est inextensible. Dans ce cas, si on néglige les frottements, le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\begin{cases} 2M\dot{x}\ddot{x} = Mg\dot{x} & \text{dans le premier cas} \\ M\dot{x}\ddot{x} = F\dot{x} & \text{dans le second cas} \end{cases}$$

L'accélération est deux fois plus grande dans le second cas.