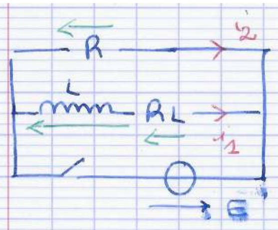
1. Surtension avec bobine – CCINP



1) K est fermé L ⇔ —

$\boxed{i_{10} = -\frac{E}{R_L}}$ $\boxed{i_{20} = -\frac{E}{R}}$

$i_{10} = -3{,}0\ A$ $i_{20} = -0{,}30\ A$

2) Pour $t>0$ K ouvert $\Rightarrow i_2 = -i_1$.

$$L\frac{di_1}{dt} + R_L i_1 + R i_1 = 0$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_L+R}{L} i_1 = 0$$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R+R_L}} \qquad \boxed{i_1(t) = i_{10}\, e^{-t/\tau}}$$

3) $u(t) = -R i_1 = \frac{ER}{R_L} e^{-t/\tau}$

4) $\frac{R}{R_L} = 10$ $u(0^+) = 10E > E$

5) $\mathcal{E}_L(0) = \frac{1}{2} L i_{10}^2 = \frac{1}{2} L \frac{E^2}{R_L^2} = \mathcal{E}_{tot}(0)$

$$\mathcal{E}_L(t\to+\infty) = 0 = \mathcal{E}_{tot}(+\infty)$$

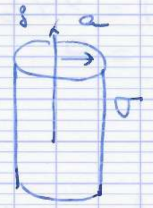
$$\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} (R+R_L)\, i_{10}^2\, e^{-2t/\tau}\, dt$$

$$= (R+R_L)\frac{E^2}{R_L^2}\,\frac{L}{R+R_L}\cdot\frac{1}{2}\left[-e^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2} L \frac{E^2}{R_L^2} = \mathcal{E}_{tot}(0).$$

Ok

2. Cylindre chargé – CCINP



Repère cylindrique $O\vec{e_r}\vec{e_\theta}\vec{e_z}$

$M(r\ \theta\ z)$ de D

1) Invariances → $\vec{E}(r)$

$(M\ \vec{e_r}\ \vec{e_\theta})$ et $(M\ \vec{e_r}\ \vec{e_z})$ plans de sym

→ $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}$

2) Th de Gauss $\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

Surface de Gauss = cylindre de rayon r et de hauteur h fermé par 2 disques

$$\Phi_{S_G}(\vec{E}) = 2\pi r h\, E(r)$$

Pour $r > a$ $q_{int} = 2\pi a \sigma h$.

Il vient $\cancel{2\pi} r \cancel{h}\, E(r) = \frac{\cancel{2\pi} a \cancel{h} \sigma}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}\vec{e_r}}$$

Or $\vec{E}(M) = -\vec{\mathrm{grad}}\, V(M)$

ou $\vec{E}(M)\cdot d\vec{OM} = -dV(M)$

$$dV(M) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}\,dr.$$

$V(M) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon} \ln r + cte.$

$V(r) = \sigma a/\varepsilon \ln \frac{a}{r} + V(a)$

3/ Pour $r < a$ $q_{int} = 0$

$\vec{E}(M) = \vec{0}$

$V(M) = cte' = -\frac{\sigma a}{\varepsilon} \ln a + cte.$

$= V(a).$

3. Bobinage torique

1. M étant un point quelconque de l'espace, le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan de symétrie pour les courants, donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique. $\vec{B}$ est donc colinéaire à $\vec{e_\theta}$. Compte tenu de l'invariance par rotation autour de l'axe Oz, le champ magnétique est de la forme

$$\vec{B}(M) = B(r, z)\vec{e_\theta}$$

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'axe Oz et de rayon r, orienté par $\vec{e_\theta}$; le théorème d'Ampère s'écrit

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\mathcal{C}}$$

où $I_{\mathcal{C}}$ est l'intensité enlacée par ce cercle. La circulation de $\vec{B}$ est

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = 2\pi r B(r, z)$$

tandis que l'intensité enlacée est

$$I_{\mathcal{C}} = \left| \begin{array}{l} Ni \text{ si } \mathcal{C} \text{ est à l'intérieur de la bobine} \\ 0 \quad \text{si } \mathcal{C} \text{ est à l'extérieur de la bobine} \end{array} \right.$$

On en déduit le champ magnétique

$$\vec{B} = \left| \begin{array}{ll} \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}\vec{e_\theta} & \text{si } \mathcal{C} \text{ est à l'intérieur de la bobine} \\ \vec{0} & \text{si } \mathcal{C} \text{ est à l'extérieur de la bobine} \end{array} \right.$$

2. Le flux propre dans le bobinage est

$$\Phi_0 = N\phi_1$$

où ϕ_1 est le flux du champ propre à travers une spire, soit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \int_{\ell-a}^{\ell+a} \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}\vec{e_\theta} \cdot \vec{e_\theta} 2a dr \\ &= \frac{\mu_0 Nia}{\pi} \ln \frac{\ell+a}{\ell+a} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\Phi_0 = \frac{\mu_0 N^2 ia}{\pi} \ln \frac{\ell+a}{\ell+a}$$

3. Le coefficient d'inductance propre de la bobine est défini par

$$\Phi_0 = Li$$

soit

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \frac{\ell+a}{\ell+a}$$

Numériquement, on obtient $L = 0,33$ mH

4. Imaginons que le fil est parcouru par un courant d'intensité I. Le champ magnétique créé par le fil est

$$\vec{B'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

Son flux à travers une spire est

$$\phi'_1 = \frac{\mu_0 Ia}{\pi} \ln \frac{\ell+a}{\ell+a}$$

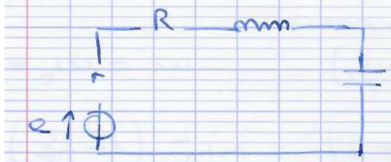
et à travers la bobine complète

$$\Phi' = N\phi'_1 = \frac{\mu_0 NIa}{\pi} \ln \frac{\ell+a}{\ell+a}$$

Le coefficient d'inductance mutuelle entre le fil et la bobine est

$$M = \frac{\mu_0 Na}{\pi} \ln \frac{\ell+a}{\ell+a} = \frac{L}{N}$$

4. Étude d'un circuit RLC au voisinage de la résonance – CCINP



1. $\underline{I} = \dfrac{E}{R+r+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}$

$I(\omega) = |\underline{I}(\omega)|$

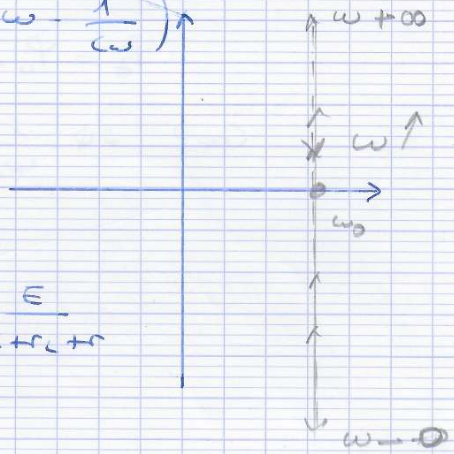
$$I(\omega) = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

I_{max} pour $\omega=\omega_0$ $\quad I_{max} = \dfrac{E}{R+r}$

2. $\underline{Z} = R+r+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)$

$Z_x = R+r$

$Z_y = \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$



Pour $\omega=\omega_0$ $\quad I = \dfrac{E}{R+r_L+r}$

3. Circuit RLC série $\quad Q = \dfrac{1}{R_{tot}}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$\underline{Z}(\omega) = R_{tot}\left[1+j\frac{1}{R_{tot}}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\right]$$

$$= R_{tot}\left[1+jQ\left(\sqrt{LC}\,\omega-\frac{1}{\sqrt{LC}\,\omega}\right)\right]$$

$$= R_{tot}\left[1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

$$\underline{Z}(\omega) = R_{tot}\left[1+jQ\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega\omega_0}\right)\right]$$

Autour de la résonance

$\omega = \omega_0(1+\varepsilon) \qquad \omega = \omega_0+\varepsilon\omega_0$

$\omega^2 = \omega_0^2(1+\varepsilon)^2 \simeq \omega_0^2(1+2\varepsilon)$

$$\underline{Z}(\omega) = R_{tot}\left[1+jQ\frac{2\varepsilon\,\omega_0^{\cancel{2}}}{\cancel{\omega_0}^2(1+\cancel{\varepsilon})}\right]$$

$$\simeq R_{tot}\left[1+j2Q\left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)\right] \text{ ok.}$$

$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = Z_m e^{j\varphi_Z} I_m e^{j\varphi_i}$

$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i$

Coef $\quad 2Q\cdot\dfrac{1}{\omega_0} = \dfrac{2}{R_{tot}}\cdot\sqrt{\dfrac{L}{C}}\cdot\sqrt{LC} = \dfrac{2L}{R_{tot}}$

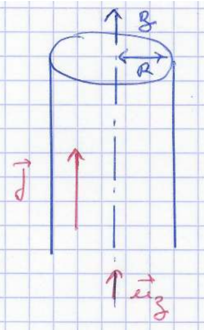
5. Dipôle – CCINP

6. Distributions planes de charges – CCINP

7. Chute d'une barre

8. Oscillateur – MT

9. Cylindre creux



1) Invariances :

* translation / z ⇒ $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de z
* rot autour de Oz ⇒ $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de θ

$\|\vec{B}\|$ ne dépend que de r.

Symétries $\Pi = (M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ plan de sym ⇒ $\vec{B} \perp$ à Π

$\vec{B}_\theta = B(r)\,\vec{e_\theta}$

Contour d'Ampère = cercle de rayon r d'axe Oz

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{OM} = 2\pi r\, B(r)$

Th d'Ampère $\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{enl}$.

Pour $r < R$ $\quad I_{enl} = \vec{j} \cdot \vec{S} = \pi r^2 j$

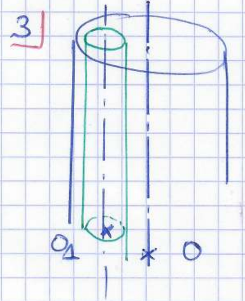
$\boxed{B_\theta = \mu_0 j \frac{r}{2}}$

Pour $r > R$ $\quad I_{enl} = \pi R^2 j$ $\quad \boxed{B_\theta = \mu_0 j \frac{R^2}{2r}}$

2) Pour $r < R$ $\quad \vec{B} = \mu_0 j \frac{r}{2} \vec{e_\theta}$ avec $\vec{e_z} \wedge \vec{e_r} = \vec{e_\theta}$

soit $\vec{B}(M) = \mu_0 j \frac{r}{2} (\vec{e_z} \wedge \vec{e_r}) = \frac{\mu_0}{2} j \vec{e_z} \wedge r\vec{e_r}$

$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{OM}}$

3) 

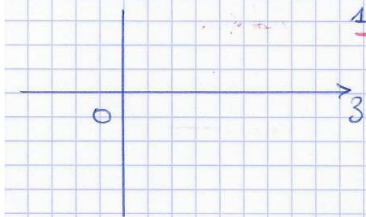
Th de superposition $\vec{0} = \vec{j} - \vec{j}$

$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 \vec{j}}{2} \wedge \vec{OM}$

$\vec{B_2} = -\frac{\mu_0 \vec{j}}{2} \wedge \vec{O_1M}$

$\boxed{\vec{B}_{tot} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{OO_1}}$ uniforme

10. Champ créé – Centrale



1) Pour $z > 0$ $\quad \rho(z) = \rho_0 e^{-z/a}$

Invariances → $\vec{E}(z)$

Symétries → $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e_z}$

Maxwell-Gauss $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Pour $z \leq 0$ $\quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$ ⇒ $E(z) = $ cte.

Pour $z > 0$ $\quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} e^{-z/a} = + \frac{dE}{dz}$

soit $E(z) = -\frac{a\rho_0}{\varepsilon_0} e^{-z/a} + \underbrace{\text{cte}'}_{0}$.

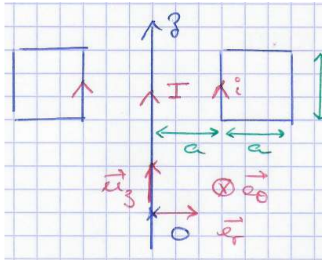
2) Th de superposition $\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{\|z\|} \vec{e_z}$

$\vec{E}_{tot} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{a\rho_0}{\varepsilon_0} e^{-z/a} \right) \vec{e_z}$ pour $z > 0$

$\vec{E}_{tot} = \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{a\rho_0}{\varepsilon_0} \right) \vec{e_z}$ pour $z < 0$.

11. Courant sinusoïdal

12. Pince ampèremétrique



$a = 5\,cm$ $\quad N = 10^4$

$R = 0{,}2\,\Omega$ $\quad r = 0{,}3\,\Omega$.

$I(t) = I_m \cos(2\pi f t)$

1) Invariances $\Rightarrow \|\vec{B}\|(r, \cancel{\theta}, z)$

Sym. $\vec{B}(M) = B(r,z)\,\vec{e}_\theta$

Th de d'Ampère $\mathcal{C} = \oint \vec{B}\cdot d\vec{OM} = \mu_0 I$ enlacée

$2\pi r\, B(r,z) = \mu_0 (I + Ni)$ ds 1 spire carrée

$\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{2\pi r}(I + Ni)$

2) $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_p + \Phi_{fil} = \displaystyle\int_a^{2a} \vec{B}\cdot\vec{dS}$ avec $\vec{dS} = a\,dr\,\vec{e}_\theta$
1 spire

$\Phi_{1\,spire} = \dfrac{\mu_0 a}{2\pi}(I + Ni)\displaystyle\int_a^{2a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 2\,(I + Ni)$

$\Phi_{\text{tot}} = \dfrac{\mu_0 N a \ln 2}{2\pi}(I + Ni)$

Loi de Faraday $\quad e = -\dfrac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt} = +\mu_0 a f \ln 2 (NI + N^2 i)$

$= (R + r)\, i$

Soit $(R+r)\, i_M \cos(\omega t + \varphi) = \mu_0 a f \ln 2\, N I_M \cos\omega t$

$+ \mu_0 a f \ln 2\, N^2 i_M \cos(\omega t + \varphi)$

RSF $\rightarrow$ Notations complexes

$i_M \left(R + r - \mu_0 a f N^2 \ln 2\right) e^{i(\omega t + \varphi)} = \mu_0 a f N \ln 2\, I_M e^{i\omega t}$

$$\frac{i_M}{I_M} = \frac{1}{\left|\dfrac{R+r}{\mu_0 a f N \ln 2} - N\right|}$$

13. Filtrage–Mines-Ponts

1) A BF. $-||- \Leftrightarrow -/-$; $-\text{mm}- \Leftrightarrow$ —— $\quad \Rightarrow s = 0$.

A HF $-||- \Leftrightarrow$ —— $\quad \Rightarrow s = 0$.

Filtre passe-bande.

2) $\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{V_E}} = \dfrac{\underline{Z}_{L//C}}{\underline{Z}_{L//C} + \underline{Z}_R}$ avec $\dfrac{1}{\underline{Z}_{L//C}} = \dfrac{1}{jL\omega} + jC\omega$

$\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \underline{Z}_R \cdot \dfrac{1}{\underline{Z}_{L//C}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{R}{jL\omega} + jRC\omega}$

$\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ $\quad$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

On veut $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1{,}0\,kHz$.

$Q = \dfrac{f_0}{\Delta f} = 100$. $\quad \Delta f = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \times \dfrac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} = \dfrac{1}{RC}$

Pour $R = 1\,k\Omega$ $\quad C = \dfrac{1}{R\Delta f} = 100\,pF$.

$L = \dfrac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$ $\quad L = 0{,}25\,mH$.

3. a) $v_E(t) = V_E \cos(2\pi f t)$ $\quad \underline{H}(f) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{f}{f_0} - \dfrac{f_0}{f}\right)}$

$G = |\underline{H}(f)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{f}{f_0} - \dfrac{f_0}{f}\right)^2}}$

Pour $f = f_0$ $\quad G = 1$; Pour $f = \dfrac{f_0}{10}$ $\quad G \simeq \dfrac{1}{10Q}$.

Pour $f = 3f_0$. $\quad G \simeq \dfrac{1}{300}$. $\quad S = 8\,mV$.

b) Fonction carrée

Moteur linéaire – Mines

1. Le cadre est mobile dans un champ magnétique dépendant du temps. On utilise la loi de Faraday. Le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers le cadre est

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{e_z}dS\\ &= B_0 a \int_x^{x+a} \cos\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}-\omega_0 t\right)dx'\\ &= \frac{\lambda B_0 a}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi(x+a)}{\lambda}-\omega_0 t\right)-\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega_0 t\right)\right]\end{aligned}$$

La force électromotrice est $e=-\dfrac{d\Phi}{dt}$; il faut ici prendre garde au fait que x est une fonction du temps. Il est commode de remplacer x par vt avant de dériver ; on obtient alors, en posant $\omega_1=\omega_0-\dfrac{2\pi v}{\lambda}$:

$$\Phi = \frac{\lambda B_0 a}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda}-\omega_1 t\right)+\sin(\omega_1 t)\right]$$

soit

$$\begin{aligned}e &= -\frac{\lambda B_0 a}{2\pi}\omega_1\left[\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}-\omega_1 t\right)-\cos(\omega_1 t)\right]\\ &= -B_0\frac{\lambda a}{2\pi}\left(\omega_0-\frac{2\pi v}{\lambda}\right)\\ &\qquad\left[\cos\left(\frac{2\pi(a+vt)}{\lambda}-\omega_0 t\right)-\cos\left(\frac{2\pi vt}{\lambda}-\omega_0 t\right)\right]\\ &= B_0 a(v-v_0)\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega_0 t\right)-\cos\left(\frac{2\pi(x+a)}{\lambda}-\omega_0 t\right)\right]\end{aligned}$$

La loi des mailles permet d'en déduire l'intensité du courant induit :

$$i=\frac{e}{R}=\frac{B_0 a(v-v_0)}{R}\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega_0 t\right)-\cos\left(\frac{2\pi(x+a)}{\lambda}-\omega_0 t\right)\right]$$

2. Les forces de Laplace sur les côtés BC et DA se compensent. Il reste

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= i\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{B}+i\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{B}\\ &= i\overrightarrow{CD}\wedge\left(\overrightarrow{B}(x+a)-\overrightarrow{B}(x)\right)\\ &= \frac{B_0^2a^2(v_0-v)}{R}\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega_0 t\right)-\cos\left(\frac{2\pi(x+a)}{\lambda}-\omega_0 t\right)\right]^2\overrightarrow{e_x}\\ &= \frac{4B_0^2a^2(v_0-v)}{R}\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\sin^2\left(\frac{\pi(2x+a)}{\lambda}-\omega_0 t\right)\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

La moyenne temporelle de cette force est

$$\langle\overrightarrow{F}\rangle=\frac{2B_0^2a^2(v_0-v)}{R}\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\overrightarrow{e_x}$$

Le système en moteur lorsqu'il fournit une puissance positive, soit pour

$$\langle\overrightarrow{F}ranglecdotv\overrightarrow{e_x}>0$$

ce qui correspond à une vitesse $v\in]0,v_0[$.

3. La puissance moyenne est

$$\mathcal{P}_m=\frac{2B_0^2a^2}{R}\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)v(v_0-v)$$

La puissance moyenne dissipée par effet Joule est

$$\mathcal{P}_J=R\langle i^2\rangle=\frac{2B_0^2a^2(v-v_0)^2}{R}\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)$$

On peut définir le rendement par

$$\eta=\frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_m+\mathcal{P}_J}=\frac{v(v_0-v)}{v(v_0-v)+(v_0-v)^2}=\frac{v}{v_0}$$

Le rendement tend vers 1 quand v tend vers v_0, mais la puissance tend aloirs vers 0. La puissance est maximale quand $v=\dfrac{v_0}{2}$; le rendement est alors égal à $\dfrac{1}{2}$.

14. Chauffage par induction – Centrale