1. Falaise de potentiel

2. Puits infini de potentiel

3. Potentiel inconnu

4. Interférences avec des atomes de néon - Longueur d'onde de de Broglie effective

1. Le théorème de l'énergie cinétique donne la vitesse à l'abscisse z : $v = \sqrt{2gz}$; on en déduit

$$\lambda(z) = \frac{h}{m\sqrt{2gz}}$$

2. La distance parcourue entre z et $z + dz$ est respectivement $dl_1 = \dfrac{S_1M}{D}dz$ et $dl_2 = \dfrac{S_2M}{D}dz$; on en déduit

$$d\phi_2 - d\phi_1 = \frac{2\pi}{D\lambda(z)}(S_2M - S_1M)dz$$

3. La différence de phase en M s'en déduit par intégration :

$$\begin{aligned}
\phi_2 - \phi_1 &= \int_0^D \frac{2\pi}{D\lambda(z)}(S_2M - S_1M)dz \\
&= \frac{2\pi m\sqrt{2g}}{Dh}(S_2M - S_1M)\int_0^D z^{1/2}dz \\
&= \frac{2\pi m\sqrt{2g}}{Dh}(S_2M - S_1M)\frac{2}{3}\left[z^{3/2}\right]_0^D \\
&= \frac{2}{3}\frac{2\pi m\sqrt{2gD}}{h}(S_2M - S_1M) \\
&= \frac{2}{3}\frac{2\pi}{\lambda_D}(S_2M - S_1M)
\end{aligned}$$

En identifiant ce résultat à

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{eff}}}(S_2M - S_1M)$$

on obtient

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{3}{2}\lambda_D$$

On commettrait une erreur de 50% en confondant λ et λ_D.

5. Équation de Shrödinger – Centrale

6. Effet Bragg dans un potentiel périodique

1. Dans l'intervalle $]0, a_1[$, l'équation de Schrödinger pour la partie spatiale s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E\varphi(x) \text{ soit } \varphi''(x) + k_1^2\varphi(x) = 0$$

On en déduit la forme de la solution générale :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ \varphi'(x) = ik_1\left(Ae^{ik_1x} - Be^{-ik_1x}\right) \end{array}\right.$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(0) = A + B \\ \varphi'(0) = ik_1(A - B) \end{array}\right.$$

et, pour $x = a_1$, en remarquant que $e^{ik_1a_1} = i$ et $e^{-ik_1a_1} = \dfrac{1}{i} = -i$:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(a_1) = Ae^{ik_1a_1} + Be^{-ik_1a_1} = i(A - B) \\ \varphi'(a_1) = ik_1\left(Ae^{ik_1a_1} - Be^{-ik_1a_1}\right) = -ik_1(A + B) \end{array}\right.$$

On en déduit que, conformément à l'énoncé :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(a_1) = \dfrac{\varphi'(0)}{k_1} \\ \varphi'(a_1) = -k_1\varphi(0) \end{array}\right.$$

2. Dans l'intervalle $]a_1, a_2[$, l'équation de Schrödinger pour la partie spatiale s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E + V_0)\varphi(x) \text{ soit } \varphi''(x) + k_2^2\varphi(x) = 0$$

On en déduit la forme de la solution générale :

$$\begin{cases} \varphi(x) = Ce^{ik_2(x-a_1)} + Be^{-ik_2(x-a_1)} \\ \varphi'(x) = ik_2\left(Ce^{ik_2(x-a_1)} - Ce^{-ik_2(x-a_1)}\right) \end{cases}$$

En particulier, pour $x = a_1$:

$$\begin{cases} \varphi(a_1) = C + D \\ \varphi'(a_1) = ik_2\,(C - D) \end{cases}$$

et, pour $x = a_1 + a_2$, en remarquant que $e^{ik_2a_2} = i$ et $e^{-ik_2a_2} = \dfrac{1}{i} = -i$:

$$\begin{cases} \varphi(a_1 + a_2) = Ce^{ik_2a_2} + De^{-ik_2a_2} = i(C - D) \\ \varphi'(a_1 + a_2) = ik_2\left(Ce^{ik_2a_2} - De^{-ik_2a_2}\right) = -ik_2(C + D) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \varphi(a_1 + a_2) = \dfrac{\varphi'(a_1)}{k_2} \\ \varphi'(a_1 + a_2) = -k_2\varphi(a_1) \end{cases}$$

3. Compte tenu des deux questions précédentes, on obtient

$$\begin{cases} \varphi(a_1 + a_2) = -\dfrac{k_1}{k_2}\varphi(0) \\ \varphi'(a_1 + a_2) = -\dfrac{k_2}{k_1}\varphi'(0) \end{cases}$$

4. La question précédente donne l'effet d'une période ; pour N périodes, on obtient

$$\begin{cases} \varphi(L) = \left(-\dfrac{k_1}{k_2}\right)^N \varphi(0) \\ \varphi'(L) = \left(-\dfrac{k_2}{k_1}\right)^N \varphi'(0) \end{cases}$$

5. La fonction d'onde et sa dérivée ont pour valeurs en $x = 0$ et $x = L$:

$$\begin{cases} \varphi(0) = (1 + r)A \\ \varphi'(0) = ik_1(1 - r)A \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi(L) = tAe^{ik_2L} \\ \varphi'(L) = ik_2tAe^{ik_2L} \end{cases}$$

On en déduit le système suivant, en posant $\eta = \dfrac{k_1}{k_2}$:

$$\begin{cases} te^{ik_2L} = (-\eta)^N(1 + r) \\ k_2te^{ik_2L} = k_1\dfrac{1}{(-\eta)^N}(1 - r) \end{cases}$$

soit, en éliminant t :

$$(-\eta)^N(1 + r) = \frac{\eta}{(-\eta)^N}(1 - r)$$

et, en ordonnant :

$$r(\eta^{2N-1} + 1) = 1 - \eta^{2N-1}$$

Finalement, on obtient

$$r = \frac{1 - \eta^{2N-1}}{1 + \eta^{2N-1}}$$

Le coefficient de réflexion en courant de probabilité est

$$R = r^2 = \left(\frac{1 - \eta^{2N-1}}{1 + \eta^{2N-1}}\right)^2$$

Quand $N \to \infty$, $\eta^{2N-1} \to 0$; les coefficients r et R tendent vers 1. Le système est parfaitement réfléchissant.

Ce comportement est complètement différent de celui qu'il prévoit la mécanique classique ; en effet, en description classique, la particule est accélérée dans les zones $V(x) = -V_0$; sa vitesse reste toujours dirigée selon les x croissants.

7. Détermination d'un potentiel – Mines