

## 1. Onde sonore – CCINP

## 2. Pression de radiation

1. Le champ magnétique est

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

Le vecteur de Poynting est

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

L'éclairement est

$$\mathcal{E} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

2. a) La puissance traversant une aire  $S$  d'un plan d'onde est

$$S\mathcal{E} = SN_0 \hbar \omega$$

On en déduit que

$$N_0 = \frac{\mathcal{E}}{\hbar \omega} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2\hbar \omega}$$

b) Le photon passe de la quantité de mouvement  $+\frac{\hbar \omega}{c} \vec{e}_x$  à la quantité de mouvement  $-\frac{\hbar \omega}{c} \vec{e}_x$ ; il transfère donc à la paroi la quantité de mouvement

$$\Delta \vec{p} = 2 \frac{\hbar \omega}{c} \vec{e}_x$$

La pression de radiation subie par la paroi est

$$P = N_0 \Delta \vec{p} \cdot \vec{e}_x = \frac{\mathcal{E}}{\hbar \omega} \times 2 \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{2\mathcal{E}}{c}$$

Compte tenu de l'expression de  $\mathcal{E}$ , cette pression peut s'exprimer par

$$P = \epsilon_0 E_0^2$$

C'est le double de la densité volumique d'énergie dans l'onde incidente.

3. Notons  $d$  la distance du vaisseau spatial au Soleil. Le vaisseau est soumis à deux forces :

- la force gravitationnelle  $F_{grav}$  attractive de norme  $\mathcal{G} \frac{M_s m}{d^2}$
- la force répulsive due à la pression de radiation de norme  $PS$ .

Dans le cas limite

$$\mathcal{G} \frac{M_s m}{d^2} = PS_{min} \text{ avec } P = \frac{2\mathcal{E}}{c}$$

Le Soleil émettant de façon pratiquement isotrope, la puissance  $\mathcal{P}$  est répartie sur une sphère d'aire  $4\pi d^2$ ; l'éclairement est donc

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi d^2} \text{ soit } P = \frac{\mathcal{P}}{2\pi c d^2}$$

On en déduit

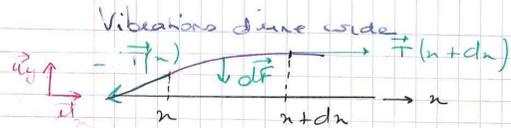
$$S_{min} = \mathcal{G} \frac{M_s m}{d^2} \times \frac{2\pi c d^2}{\mathcal{P}} = \mathcal{G} \frac{2\pi c M_s m}{\mathcal{P}}$$

Numériquement, on obtient

$$S_{min} = 6,3 \cdot 10^5 \text{ m}^2$$

soit un carré de 800 m de côté.

## 3. Vibrations d'une corde – CCINP



$\Delta l$  = morceau de corde on a de  $x$  à  $x+dx$

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces  $\vec{P} = \rho dx \vec{g}$  poids négligé

Forces de tensions  $\vec{T}(x+dx)$ ,  $-\vec{T}(x)$

Force de rappel  $d\vec{F} = -K dx \vec{e}_y$

$$\rho dx \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) + d\vec{F}$$

Soit  $\vec{e}_x$ :  $0 = T(x+dx) \cos \alpha(x+dx) - T(x) \cos \alpha(x)$

Soit  $\vec{e}_y$ :  $\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx) \sin \alpha(x+dx) - T(x) \sin \alpha(x) - K dx y$

Soit  $\frac{\partial T \cos \alpha}{\partial x} dx = 0$  avec  $\alpha \ll 1$  et  $\cos \alpha \approx 1$

$$T = \text{cte.}$$

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx - K dx y$$

Pour  $\alpha \ll 1$ ,  $ds = dx$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{K}{\rho} y$$

$$\text{Soit } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \omega_0^2 y$$

Relation de dispersion

$$-\omega^2 = -k^2 c^2 - \omega_0^2$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}}$$

Idem plasma

## 4. Câble coaxial réel - CCINP

## 4. Câble coaxial réel



## 1) Loi des nœuds

$$i(x,t) = i(x+dl,t) + i_c$$

$$\text{avec } i_c = dl \frac{\partial v}{\partial t}(x+dl,t)$$

$$\text{Soit } 0 = \frac{\partial i}{\partial x} dl + Y dl \frac{\partial v}{\partial t}$$

## 2) Loi des mailles

$$u(x,t) = dl \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + dl R i(x,t) + u(x+dl,t)$$

$$\text{Soit } 0 = dl \frac{\partial i}{\partial t} + p i + \frac{\partial v}{\partial x} dl$$

$$3) \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$= -\gamma \left[ -dl \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - p \frac{\partial i}{\partial x} \right]$$

$$\text{Il vient } \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = dl \gamma \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \gamma p \frac{\partial i}{\partial x} \quad \text{ou}$$

d'Alembert      terme d'ordre 1

→ Annulation du terme d'ordre 1

$$-k^2 v = -\omega^2 \epsilon \mu v + i \omega \sigma \mu v$$

$$\frac{k^2}{\epsilon} = \frac{\omega^2}{c^2} - i \omega \sigma \mu \quad k \in \mathbb{C}$$

$$\text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

## 5. Onde cylindrique

1. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, en représentation complexe

$$-i\omega \vec{B} = \text{rot} \vec{E}$$

soit

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{i}{\omega} \overrightarrow{\text{grad}} (E(r) \exp(i(\omega t - kr))) \wedge \vec{e}_z \\ &= -\frac{i}{\omega} (E'(r) \exp(i(\omega t - kr)) - ikE(r) \exp(i(\omega t - kr))) \vec{e}_\theta \\ &= -\frac{k}{\omega} \exp(i(\omega t - kr)) \left( E(r) + \frac{i}{k} E'(r) \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Le premier terme donne un champ magnétique en phase avec le champ électrique, comme dans une onde plane progressive; le second terme donne un champ magnétique en quadrature avec le champ électrique.

2. En revenant aux champs réels, on obtient

$$\begin{cases} \vec{E} = E(r) \cos(\omega t - kr) \vec{e}_z \\ \vec{B} = -\frac{k}{\omega} \left( E(r) \cos(\omega t - kr) + \frac{1}{k} E'(r) \sin(\omega t - kr) \right) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

On en déduit le vecteur de Poynting instantané

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{k}{\mu_0 \omega} \left( E^2(r) \cos^2(\omega t - kr) \right. \\ &\quad \left. + \frac{E(r)E'(r)}{k} \sin(\omega t - kr) \cos(\omega t - kr) \right) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Sa moyenne temporelle est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{kE^2(r)}{2\mu_0 \omega} \vec{e}_r$$

La puissance moyenne rayonnée est le flux du vecteur de Poynting moyen, soit

$$\mathcal{P} = \frac{kE^2(r)}{2\mu_0 \omega} 2\pi r h = \frac{\pi k h r E^2(r)}{\mu_0 \omega}$$

3. La puissance moyenne est indépendante de  $r$ , donc

$$rE^2(r) = \frac{\mu_0 \omega \mathcal{P}}{\pi k h}$$

soit

$$E(r) = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega \mathcal{P}}{\pi k h r}}$$

4. Hors des sources, le champ électrique obéit à l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \text{rot} (\text{rot} \vec{E}) \\ &= \vec{0} + i\omega \text{rot} \vec{B} \\ &= i\omega \overrightarrow{\text{grad}} (rB(r, t)) \wedge \frac{\vec{e}_\theta}{r} \end{aligned}$$

avec

$$B(r, t) = -\frac{k}{\omega} \exp(i(\omega t - kr)) \left( E(r) + \frac{i}{k} E'(r) \right)$$

soit, en dérivant par rapport à  $r$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(r, t)}{\partial r} &= -ikB - \frac{k}{\omega} \exp(i(\omega t - kr)) \left( E'(r) + \frac{i}{k} E''(r) \right) \\ &= -\frac{k}{\omega} \exp(i(\omega t - kr)) \left( -ikE(r) + 2E'(r) + \frac{i}{k} E''(r) \right) \end{aligned}$$

Compte tenu de la question précédente, on peut écrire

$$\begin{cases} E(r) = \alpha r^{-1/2} \\ E'(r) = -\frac{1}{2} \alpha r^{-3/2} \\ E''(r) = \frac{3}{4} \alpha r^{-5/2} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} B(r, t) = -\frac{k\alpha}{\omega\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \left( 1 - \frac{i}{2kr} \right) \\ \frac{\partial B(r, t)}{\partial r} = -\frac{k\alpha}{\omega r^{3/2}} \exp(i(\omega t - kr)) \left( -ikr - 1 + \frac{3i}{4kr} \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{grad}}(rB(r,t)) &= \left( B(r,t) + r \frac{\partial B(r,t)}{\partial r} \right) \vec{e}_r \\
 &= -\frac{k\alpha}{\omega\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \left( 1 - \frac{i}{2kr} - ikr - 1 + \frac{3i}{4kr} \right) \vec{e}_r \\
 &= -\frac{k\alpha}{\omega\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \left( -ikr + \frac{5i}{4kr} \right) \vec{e}_r \\
 &= \frac{ik^2\alpha r}{\omega\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \left( 1 - \frac{5}{4k^2r^2} \right) \vec{e}_r \\
 &\simeq \frac{ik^2\alpha r}{\omega\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \vec{e}_r
 \end{aligned}$$

en négligeant le terme d'ordre 2. Il reste ainsi

$$\Delta \vec{E} = -\frac{k^2\alpha}{\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \vec{e}_z = -k^2 \vec{E}$$

L'équation de d'Alembert se réduit donc à

$$-k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \text{ soit } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

On retrouve la même relation de dispersion que pour une onde plane progressive.

5. Les champs sont, en ne retenant que le terme prépondérant dans  $\vec{B}$  :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\alpha}{\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \vec{e}_z \\ \vec{B} = -\frac{k}{\omega} \frac{\alpha}{\sqrt{r}} \exp(i(\omega t - kr)) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

On vérifie que

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E}$$

L'onde cylindrique a localement la structure d'une onde plane progressive se propageant selon  $\vec{e}_r$ , pour  $r \gg \lambda$ .

## 6. Propagation guidée – Mines

## 7. Onde sonore – CCINP

Onde sonore

$z_1 = p_1 c_1$   
 $z_2 = p_2 c_2$

1. A l'interface  $u_1(0,t) = u_2(0,t)$   
 et  $p_1(0,t) = p_2(0,t)$

or  $z_1 = \frac{p_1}{u_1} \Rightarrow p_1 = z_1 u_1$

De même  $p_2 = z_2 u_2 \Rightarrow z_1 = z_2$

On a  $u_i + u_r = u_t$  en  $x=0$   
 et  $p_i + p_r = p_t$  en  $x=0$

Sachant que  $z_1 = \frac{p_i}{u_i}$   $z_2 = \frac{p_t}{u_t}$

Il vient  $u_i + u_r = u_t$   
 $z_1(u_i + u_r) = z_2 u_t$

$$1 + r = t \quad \text{et} \quad \left( \frac{z_2}{z_1} + 1, t \right)$$

$$1 + r = \frac{z_2}{z_1} t$$

$$t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$$

$$r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

$$u_{r0} = \frac{p_2 c_1 - p_1 c_2}{p_1 c_1 + p_2 c_2} u_0 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} u_0$$

$$u_{t0} = \frac{2 p_1 c_1}{p_1 c_1 + p_2 c_2} u_0 = \frac{2}{1 + \alpha} u_0$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i(n,t) &= u_0 e^{i(\omega t - kn)} \vec{e}_n \\ \vec{u}_r(n,t) &= r_0 u_0 e^{i(\omega t + kn)} \vec{e}_n \\ \vec{u}_t(n,t) &= t_0 u_0 e^{i(\omega t - k'n)} \vec{e}_n \end{aligned}$$

2. Equation d'Etat linearisee

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = - \frac{\partial p_i}{\partial n} \vec{e}_n$$

Soit  $p_i \omega \vec{u}_i = +ik p_i \vec{e}_n$

$$p_i(n,t) = c_1 p_0 u_0 e^{i(\omega t - kn)} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c_1}$$

$$p_r \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial t} = - \frac{\partial p_r}{\partial n} \vec{e}_n$$

$$p_r \omega \vec{u}_r \vec{e}_n = - ik p_r \vec{e}_n$$

$$p_r(n,t) = -r_1 c_1 u_0 e^{i(\omega t + kn)}$$

$$p_r(n,t) = -z_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} u_0 e^{i(\omega t + kn)}$$

$$p_t(n,t) = z_2 \frac{2z_1}{z_1 + z_2} u_0 e^{i(\omega t - k'n)}$$

3.  $\vec{\Pi} = p \vec{u}$

Onde incidente

$$\vec{\Pi}_i = p_i \vec{u}_i = z_1 u_0^2 \cos^2(\omega t - kn) \vec{e}_n$$

$$P_{i,t} = \vec{\Pi}_i \cdot \vec{S} = z_1 u_0^2 \cos^2 \dots S$$

Onde reflechie

$$\vec{\Pi}_r = p_r \vec{u}_r = -z_1 \left( \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} u_0 \right)^2 S \cos^2 \dots \vec{e}_n$$

Onde transmise

$$\vec{\Pi}_t = p_t \vec{u}_t = z_2 \left( \frac{2z_1}{z_1 + z_2} u_0 \right)^2 S \cos^2 \dots \vec{e}_n$$

4. Moyenne temporelle  $\frac{1}{T}$

$$R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot \vec{e}_n}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{e}_n} = \frac{z_1 (z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2 z_1}$$

$$T = \frac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot (+\vec{e}_n)}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot (-\vec{e}_n)} = z_2 \frac{4z_1^2}{(z_1 + z_2)^2 z_1} = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$$

$$R = \left( \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \quad T = 4 \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

$$R + T = \frac{1 - 2\alpha + \alpha^2 + 4\alpha}{(1 + \alpha)^2} = 1 \quad \text{OK}$$

5 Pour  $p_1 c_1 \ll p_2 c_2 \Leftrightarrow \alpha \gg 1$

$$\begin{aligned} r_v &= 1 & R &= 1 \\ t_v &= 0 & T &= 0 \end{aligned}$$

## 8. Système GPS et ionosphère

1. Le champ magnétique est, pour une onde plane progressive dans le vide :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{E}$$

ce qui conduit, en supposant le comportement proche du vide, que, au moins en ordre de grandeur

$$\frac{B}{E} \simeq \frac{1}{c}$$

Le rapport des forces magnétiques et électriques est donc

$$\frac{F_B}{V_E} = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \simeq \frac{v}{c}$$

La force magnétique est donc négligeable devant la force électrique pour des particules chargées non relativistes.

2. En régime harmonique, la vitesse des électrons s'obtient par application du théorème de la résultante cinétique, qui s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \text{ soit } im\omega\vec{v}_e = -e\vec{E}$$

et finalement

$$\vec{v}_e = \frac{ie}{m\omega} \vec{E}$$

De même, la vitesse des ions en régime harmonique est

$$\vec{v}_i = -\frac{ie}{M\omega} \vec{E}$$

La densité de courant est

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_e + ne\vec{v}_i = -\frac{ine^2}{\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E}$$

On en déduit la conductivité

$$\underline{\gamma}(\omega) = -\frac{ine^2}{\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \simeq -\frac{ine^2}{m\omega}$$

On néglige la contribution des ions dont la masse est  $M \gg m$ .

3. En régime harmonique, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\underline{\gamma} + i\omega\epsilon_0) \vec{E}$$

tandis que l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B} \text{ soit } \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

En éliminant  $\vec{B}$  et  $\underline{\gamma}$  dans la première équation, on obtient

$$-i\vec{k} \wedge \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \right) = \mu_0 \left( -\frac{ine^2}{m\omega} + i\omega\epsilon_0 \right) \vec{E}$$

Le champ électrique est transversal puisque le plasma est neutre, d'après l'équation de Maxwell-Gauss ; l'équation précédente se réduit donc à

$$i\frac{k^2}{\omega} \vec{E} = i\mu_0\epsilon_0 \left( \omega - \frac{ine^2}{m\omega\epsilon_0} \right) \vec{E}$$

soit

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu_0\epsilon_0 \left( 1 - \frac{ne^2}{m\omega^2\epsilon_0} \right)$$

et, compte tenu de l'identité  $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$  :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$$

ce qui est de la forme annoncée, avec

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$$

4. Il n'y a propagation que si  $k$  est réel, ce qui impose  $\omega > \omega_p$  ; l'ionosphère est donc un passe-haut de pulsation de coupure  $\omega_p$ .

Pour  $\omega > \omega_p$ ,  $k$  est réel. La vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de groupe est

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

En dérivant par rapport à  $k$  la relation de dispersion mise sous la forme  $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$ , on obtient

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2kc^2 \text{ soit } v_\varphi v_g = c^2$$

ce qui donne

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

On note que la vitesse de phase est supérieure à  $c$ , tandis que la vitesse de groupe est inférieure à  $c$ .

5. Le temps de parcours est

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{D-H}{c} + \frac{H}{v_g} = \frac{D-H}{c} + \frac{H}{c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \\ &\simeq \frac{D-H}{c} + \frac{H}{c} \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right) \\ &= \frac{D}{c} + \frac{H}{c} \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \end{aligned}$$

6. Pour deux pulsations différentes, on obtient

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{D}{c} + \frac{H}{c} \frac{\omega_p^2}{2\omega_1^2} \\ \tau_2 = \frac{D}{c} + \frac{H}{c} \frac{\omega_p^2}{2\omega_2^2} \end{cases} \text{ soit } \Delta\tau = \frac{H}{2c} \left( \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2} \right)$$

7. L'approximation  $D \simeq c\tau$  n'est pas suffisante pour obtenir une précision de l'ordre du mètre; la correction due à l'ionosphère est donc indispensable.

## 9. Conducteur ohmique – Centrale

Conducteur ohmique.

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{négligé}} \\ &+ \text{la d'Ohm locale } \vec{j} = \sigma \vec{E} \\ \text{D'autre part } \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{j} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Variable si } \epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \vec{j} \right\| \\ \Leftrightarrow \frac{\epsilon_0}{\sigma} \omega \ll 1 \quad \omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Eq. de diffusion.

$$3. \text{ On pose } \vec{j}(z) = \underline{J}_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x.$$

$$\Delta \vec{j} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \rightarrow -k^2 = j\omega \mu_0 \sigma$$

$$k = \pm e^{-j\pi/4} \sqrt{\omega \mu_0 \sigma} = \pm (1-j) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}}$$

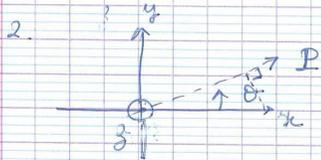
$$j(z) = \underline{J}_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right)$$

$$\text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

## 10. Polariseur – Centrale

Polariseur

$$1. \vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x$$



Après le polariseur

$$\vec{E}_1(z, t) = E_0 \cos \theta (\cos \omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x$$

$$\text{avec } \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z$$

$$T = \frac{E_1^2}{E_0^2} = \cos^2 \theta \quad \text{loi de Malus.}$$

3. N polariseur

$$\vec{E}_N(z, t) = \underbrace{E_0 \cos^N \theta}_{E_{0N}} \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_{N\theta}$$

$$\delta \theta = \frac{\pi}{2N} \quad N\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{la direction de polarisation a tourné de } \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^N \theta = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} e^{ik\theta} e^{-i(N-k)\theta}$$

$$T_N = \cos^{2N} \frac{\pi}{2N} \quad \text{pour } N \gg 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2N} \approx 1 - \frac{\pi^2}{8N^2}$$

$$\cos^{2N} \left( \frac{\pi}{2N} \right) \approx 1 - \frac{\pi^2}{4N} \quad N > 248$$

**11. Onde sonore – Centrale**