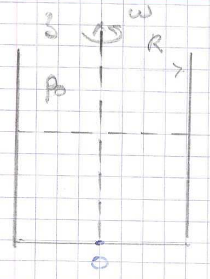
1. Équilibre d'un fluide – CCINP

Equilibre d'un fluide



$\vec{\omega} = \omega \vec{u_z}$

Σ = eau dans cylindre

Réf du cylindre non galiléen

BdF pour eau à l'équilibre

* poids $\vec{P_v} = \rho \vec{g}$
* forces pressantes $\vec{F}_{P_v} = -\vec{grad}\, P$
* forces d'inertie d'entraînement

$\vec{f}_{ient} = + \rho \omega^2 \vec{HM}$ H = projeté ⊥ de M sur Oz.

Eq. fond de la statique des fluides

$$\vec{0} = \rho \vec{g} - \vec{grad}\, P + \rho \omega^2 \vec{HM}$$

M(r θ z)

Selon $\vec{e_r}$ $0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho \omega^2 r$ (1)

Selon $\vec{e_\theta}$ $0 = -\frac{\partial P}{\partial \theta}$ P ne dépend pas de θ

Selon $\vec{e_z}$ $0 = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z}$ (2)

(2) $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$ $P(r,z) = -\rho g z + f(r)$

dans (1) → $\frac{df}{dr} = \rho \omega^2 r$

$f(r) = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + cte$

On a $\boxed{P(r;z) = -g \rho z + \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + cte}$.

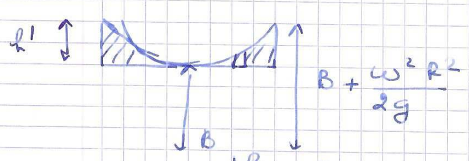
2.] Surface libre de l'eau $P(r, z) = P_0$

$\Leftrightarrow \quad P_0 = -\rho g z + \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + cte.$

$$\boxed{z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + B} \qquad B = \frac{cte - P_0}{\rho g}$$

3.] Conservation du volume.

$$h \pi R^2 = B \pi R^2 + \frac{\omega^2}{g} \frac{R^4}{4} \pi$$



$$V = \int_0^{+R} 2\pi r \frac{\omega^2 r^2}{2g} dr = \frac{\omega^2}{g} \pi \frac{R^4}{4}$$

Soit $\boxed{B = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}}$.

$$V = \frac{1}{2} \pi R^2 h' = \frac{1}{2} \pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \pi \omega^2 \frac{R^4}{4g} \text{ ok.}$$

2. Fluide visqueux entre deux plaques – Centrale

3. Modèle de cyclone – CCINP

Modèle de cyclone (Joffre)

1.] Vecteur rotation uniforme.

$\vec{OM} = r \vec{e_r}$

$\vec{v} = r \frac{d\theta}{dt} \vec{e_\theta} = r \Omega \, \vec{e_z} \wedge \vec{e_r}$

$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$

Par définition

$\vec{\Omega}$ = vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{rot}\, v$

Le flux d'un champ de tourbillon est nul.

$\Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{\Omega} = 0.$

2.] Lignes de courant = cercle

$\vec{rot}\, \vec{v} = 2\vec{\Omega} = 2\Omega \vec{e_z}$

$= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} \right) \vec{e_z}$

$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} = 2\Omega.$

$\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} = 2\Omega r \qquad r v_\theta = 2\Omega \frac{r^2}{2} + cste.$

$v_\theta(r) = \Omega r + \cancel{\frac{cste}{r}}$ diverge en 0.

$v_\theta(r) = \Omega r$ pour $r < a$.

Pour $r > a$ $\quad \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} = 0$

$r v_\theta = cte \qquad v_\theta = \frac{A}{r} = \frac{\Omega R^2}{r}.$

On a $v_\theta(R) = 180$ km/h

$\Omega = \frac{v(R)}{a}$ $\quad \Omega = 1,0$ rad s^{-1}

3) Loin du cyclone $p = p_0$.

A l'extérieur du cylindre Bernoulli

Eq. homogène parfait permanent incompressible irrotationnel

$$p + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = cte.$$

$$p(a) = p_0 - \rho\frac{v^2(a)}{2}$$

A l'intérieur du cylindre

Euler $\rho\left[\frac{\partial \vec v}{\partial t} + (\vec v.\overrightarrow{grad})\vec v\right] = -\overrightarrow{grad}\, p + \rho\vec g$

$\frac{\partial \vec v}{\partial t} = \vec 0 \quad \vec v.\overrightarrow{grad} = \Omega r\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$

$(\vec v.\overrightarrow{grad})\,\Omega r\vec{e_\theta} \to \Omega\frac{\partial}{\partial\theta}(\Omega r\vec{e_\theta})$

$= -\Omega^2 r\vec{e_r}$

$-\rho\Omega^2 r = -\frac{\partial p}{\partial r}$

$p(r) = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + cte$

avec $p(a) = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 a^2 + cte$

$= p_0 - \rho\frac{v^2(a)}{2}$ ← Pmin

$p(r) = \rho\frac{r^2}{2}\Omega^2 + (p_0 - \rho R^2\Omega^2)$

4. Tourniquet hydraulique

1. Soit $\mathcal{T}$ le référentiel tournant. Les forces volumiques dans $\mathcal{T}$ sont les forces de pesanteur et les forces d'inertie.

La densité volumique de force est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\phi_v} &= -\rho g\overrightarrow{e_z} + \rho r\omega^2\overrightarrow{e_r} - 2\rho\omega\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{v}\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\rho g z - \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2\right) - 2\rho\omega\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Ecrivons l'équation d'Euler dans $\mathcal{T}$; on obtient

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v^2 - \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(p + \rho g z - \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2\right) - 2\rho\omega\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{v}$$

soit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2\right) = \rho\overrightarrow{v}\wedge\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} + 2\omega\overrightarrow{e_z}\right)$$

La grandeur $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2$ est donc uniforme le long d'une ligne de courant.

2. Le bilan de masse nous donne

$$D = \rho S V = 2\rho s v$$

D'après le résultat de la première qestion, on a

$$p(0) + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho L^2\omega^2$$

soit

$$\begin{aligned}p(0) &= p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(v^2 - V^2) - \frac{1}{2}\rho L^2\omega^2\\ &= p_0 + \rho g h + \frac{D^2}{2\rho}\left(\frac{1}{4s^2} - \frac{1}{S^2}\right) - \frac{1}{2}\rho L^2\omega^2\end{aligned}$$

3. D'après le résultat de la première question, on a

$$p(0) + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 + \rho g(h + H)$$

soit

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 + \rho g(h+H) - \frac{1}{2}\rho V^2 \\ &= p_0 + \rho g(h+H) - \frac{D^2}{2\rho S^2} \end{aligned}$$

En égalant les deux expressions de $p(0)$, on obtient

$$p_0 + \rho g(h+H) - \frac{D^2}{2\rho S^2} = p_0 + \rho g h + \frac{D^2}{2\rho}\left(\frac{1}{4s^2} - \frac{1}{S^2}\right) - \frac{1}{2}\rho L^2\omega^2$$

On en déduit

$$D^2 = 8\rho^2 s^2 \left(gH + \frac{1}{2}L^2\omega^2\right)$$

soit

$$D = 2\rho s\sqrt{2gH + L^2\omega^2}$$

La rotation accroît la vitesse de la vidange.

4. a) Dans le référentiel terrestre, la vitesse d'éjection est

$$\overrightarrow{v_e} = L\omega\overrightarrow{e_\theta} + v(\sin\alpha\overrightarrow{e_r} - \cos\alpha\overrightarrow{e_\theta})$$

Le système choisi est le liquide en transit à l'instant t dans le tourniquet et le liquide qui y entre pendant $[t, t+\Delta t]$. On obtient un système fermé pendant $[t, t+\Delta t]$ en conservant dans le système le liquide sortant pendant cet intervalle de temps.
La masse de liquide entrant est $D\Delta t$; le liquide entrant a un moment cinétique nul par rapport à l'axe Oz.
La masse de liquide sortant est $D\Delta t$; le liquide sortant a un moment cinétique $\Delta\sigma$ par rapport à l'axe Oz, avec

$$\Delta\sigma = DL(L\omega - v\cos\alpha)\Delta t$$

En régime permanent le moment cinétique par rapport à Oz du fluide en transit dans le tourniquet a la même valeur σ_0 aux dates t et $t+\Delta t$. On en déduit le moment cinétique du système fermé à ces deux dates :

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_0 \\ \sigma(t+\Delta t) = \sigma_0 + DL(L\omega - v\cos\alpha)\Delta t \end{cases}$$

Le tourniquet exerce sur l'eau un couple

$$\begin{aligned} -\Gamma &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\sigma(t+\Delta t) - \sigma(t)}{\Delta t} \\ &= DL(L\omega - v\cos\alpha) \end{aligned}$$

Le couple exercé par l'eau sur le tourniquet est

$$\Gamma = DL\left(\frac{D\cos\alpha}{2\rho s} - L\omega\right)$$

c) La puissance fournie par l'eau au tourniquet est

$$\mathcal{P} = \Gamma\omega = DL\omega\left(\frac{D\cos\alpha}{2\rho s} - L\omega\right)$$

Si le système est utilisé en moteur, le rendement peut être défini par

$$\eta = \frac{\mathcal{P}}{DgH} = \frac{L\omega}{gH}\left(\frac{D\cos\alpha}{2\rho s} - L\omega\right)$$

or

$$D^2 = 4\rho^2 s^2\left(2gH + L^2\omega^2\right)$$

donc

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{D^2}{4\rho^2 s^2} - 2gH}}{gH}\left(\frac{D\cos\alpha}{2\rho s} - \sqrt{\frac{D^2}{4\rho^2 s^2} - 2gH}\right)$$

Numériquement, on obtient

$$\eta = 0,43$$

5. Citerne de pompier – CCINP

6. Viscosimètre de Couette

1. En raison de l'invariance par rotation autour de l'axe Oz, il est naturel de chercher un champ des vitesses de la forme

$$\overrightarrow{v} = u(r)\overrightarrow{e_r} + v(r)\overrightarrow{e_\theta}$$

L'incompressibilité se traduit par

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0 \text{ soit } \frac{d}{dr}\left(ru(r)\right) = 0$$

et, en intégrant : $ru(r) = \text{Cte}$. Les conditions aux limites imposées par les parois donnent

$$\overrightarrow{v}(R_1) = R_1\Omega_1\overrightarrow{e_\theta} \text{ et } \overrightarrow{v}(R_2) = R_2\Omega_2\overrightarrow{e_\theta}$$

On a donc

$$ru(r) = R_1 u(R_1) = 0 \text{ soit } u(r) = 0$$

Il reste donc $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_\theta}$

2. L'équation de Navier-Stokes s'écrit, en mouvement permanent

$$\rho\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 - \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 &= v(r)v'(r)\overrightarrow{e_r}\\
\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{\text{rot}}\left(rv(r)\frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}\right)\\
&= \overrightarrow{\text{grad}}\,(rv(r))\wedge\frac{\overrightarrow{e_\theta}}{r}\\
&= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv(r))\overrightarrow{e_z}\\
\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} &= v(r)\overrightarrow{e_\theta}\wedge\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv(r))\overrightarrow{e_z}\\
&= \frac{v(r)}{r}\frac{d}{dr}(rv(r))\overrightarrow{e_r}\\
&= \left(v(r)v'(r) + \frac{v^2(r)}{r}\right)\overrightarrow{e_r}\\
\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 - \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} &= -\frac{v^2(r)}{r}\overrightarrow{e_r}\\
\Delta\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\overrightarrow{v} - \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\\
&= -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv(r))\overrightarrow{e_z}\right)\\
&= -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv(r))\right)\wedge\overrightarrow{e_z}\\
&= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv(r))\right)\overrightarrow{e_\theta}
\end{aligned}$$

L'invariance par rotation conduit à une pression ne dépendant que de r, de telle sorte que $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = P'(r)\overrightarrow{e_r}$.

En projection sur $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, l'équation de Navier-Stokes conduit aux équations scalaires suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
-\rho\frac{v^2(r)}{r} &= -p'(r)\\
0 &= \eta\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv(r))\right)
\end{aligned}\right.$$

La seconde équation conduit, par intégration, à

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv(r)) = A$$

où A est une constante, puis, après une seconde intégration, à

$$rv(r) = A\frac{r^2}{2} + B$$

où B est une constante, soit

$$v(r) = A\frac{r}{2} + \frac{B}{r}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites ; la vitesse doit être continue lors du passage de la paroi au fluide en contact

$$\left\{\begin{aligned}
R_1\Omega_1 &= A\frac{R_1}{2} + \frac{B}{R_1}\\
R_2\Omega_2 &= A\frac{R_2}{2} + \frac{B}{R_2}
\end{aligned}\right.$$

ce qui conduit à

$$\left\{\begin{aligned}
A &= 2\frac{R_2^2\Omega_2 - R_1^2\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}\\
B &= \frac{R_1^2R_2^2(\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}
\end{aligned}\right.$$

En reprenant la première équation, on a

$$P'(r) = \rho\frac{v^2(r)}{r} = \rho\left(\frac{A^2r^2}{4} + AB + \frac{B^2}{r^2}\right)$$

soit, en intégrant

$$P(r) = \rho\left(\frac{A^2r^2}{8} + AB\ln\frac{r}{r_0} - \frac{B^2}{2r^2}\right)$$

3. La viscosité n'intervient pas car le champ des vitesses est tel que $\Delta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Néanmoins, le problème serait différent dans le cas d'un fluide parfait, car la condition aux limites n'imposerait plus une vitesse de norme $R_i\Omega_i$ au contact des parois.

4. La force surfacique de viscosité exercée par le fluide à l'intérieur du cylindre de rayon r sur le fluide à l'extérieur de ce cylindre est

$$\overrightarrow{\varphi}_{s,visc} = -\eta r\frac{d}{dr}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{r^2}\right)\overrightarrow{e_\theta} = \eta\frac{2B}{r^2}\overrightarrow{e_\theta}$$

La force surfacique de viscosité exercée par la paroi extérieure sur le fluide est donc

$$\overrightarrow{\varphi}_{s,visc} = -\eta \frac{2B}{R_2^2} \overrightarrow{e_\theta}$$

Le moment par rapport à l'axe Oz exercée par la force de viscosité s'excerçant sur un élément de surface dS est

$$d\Gamma = -\overrightarrow{e_z} \cdot \left(\overrightarrow{OM} \wedge \eta \frac{2B}{R_2^2} \overrightarrow{e_\theta} \right) dS = -\eta \frac{2B}{R_2} dS$$

En intégrant sur toute l'aire de la paroi extérieure, on obtient

$$\Gamma = -\eta \frac{2B}{R_2} 2\pi R_2 h = \frac{4\pi\eta h R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}$$

5. En appliquant le théorème du moment cinétique au fluide entre les deux cylindres, on a

$$\Gamma - C\theta_e = 0$$

soit

$$\theta_e = \frac{4\pi\eta h R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{C(R_2^2 - R_1^2)}$$

Pour $\Omega = 5$ rad/s, $R = 5$ cm, $e = 1$ mm, $h = 10$ cm, on mesure un angle de torsion $\theta_e = 4,6^o$C pour $C = 5.10^{-3}$ N.m.rad^{-1}. On en déduit la viscosité du fluide $\eta = 10^{-3}$ Pa.s.

7. Fusée – CCINP

8. Écoulements géostrophiques – Centrale

1. L'équation d'Euler s'écrit, dans le référentiel terrestre :

$$\mu \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \mu \overrightarrow{g} - 2\mu \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

2.
- $\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \overrightarrow{v}$ a pour ordre de grandeur $\dfrac{U^2}{L}$
- $2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$ a pour ordre de grandeur $2U\Omega$
- on en déduit le nombre de Rossby

$$Ro = \frac{U}{2L\Omega} = 7.10^{-2}$$

- le nombre de Reynolds est

$$Re = \frac{LU}{\nu} = 10^{12} \gg 1$$

La viscosité est négligeable.
Pour un nombre de Rossby très inférieur à 1, on peut négliger le terme convectif. Il reste

$$\mu \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \mu \overrightarrow{g} - 2\mu \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

3. a) En régime stationnaire

$$\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \mu \overrightarrow{g} - 2\mu \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

soit

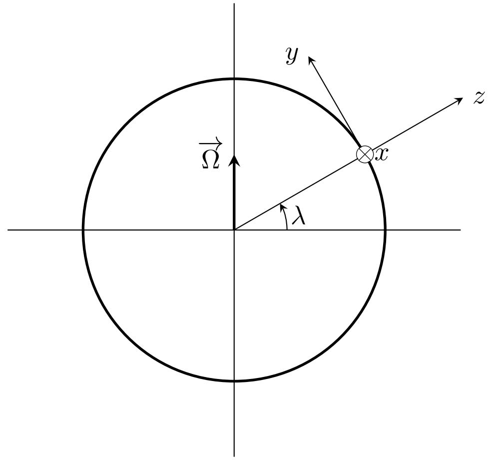
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, (P + \mu g z) = -2\mu \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

b) Le long d'une ligne de courant

$$d\hat{P} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \hat{P} \cdot \overrightarrow{dM} = -2\mu \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v} \right) \cdot \overrightarrow{dM} = 0$$

car $\overrightarrow{dM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$. $\hat{P}$ est donc uniforme le long d'une ligne de courant.
c) Lorsque le théorème de Bernoulli est applicable, c'est la somme $P + \mu g z + \dfrac{1}{2}\mu v^2$ qui est uniforme le long d'une ligne de courant.

4. a) On a $\dfrac{2U\Omega}{g} = 1,4.10^{-4} \ll 1$; le gradient vertical de pression n'est donc pratiquement dû qu'à la pesanteur.
b)



Sur la base terrestre locale, on a

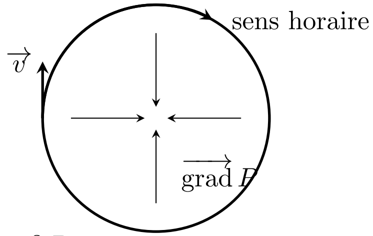
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega} &= \Omega(\sin\lambda\overrightarrow{e_z} + \cos\lambda\overrightarrow{e_y}) \\ &= \Omega(\sin\lambda\overrightarrow{e_z} + \cos\lambda(\sin\theta\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta}) \\ \overrightarrow{v} &= v\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v} &= \Omega v(-\sin\lambda\overrightarrow{e_r} + \cos\lambda\sin\theta\overrightarrow{e_z})\end{aligned}$$

Le gradient horizontal de pression est

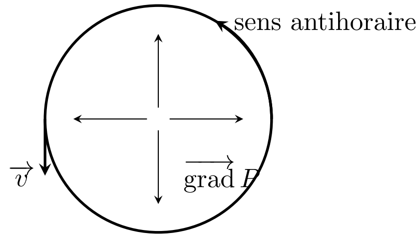
$$\frac{\partial P}{\partial r} = -2\mu\overrightarrow{e_r}\cdot\left(\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}\right) = +2\mu\Omega v\sin\lambda$$

Dans l'hémisphère Nord, $\sin\lambda > 0$.

— Pour un anticyclone, $\dfrac{\partial P}{\partial r} < 0$ donc $v < 0$.



— Pour une dépression, $\dfrac{\partial P}{\partial r} > 0$ donc $v > 0$.



c) Dans l'hémisphère Sud, $\sin\lambda < 0$, le sens de la vitesse est inversé.

9. Forme d'un filet d'eau

1. L'ordre de grandeur de la vitesse à la sortie du robinet est v_0 telle que $D = \pi r_0^2 v_0$ soit $v_0 \simeq 0,06$ m.s^{-1}. Le nombre de Reynolds correspondant à cet écoulement est

$$Re_0 = \frac{\rho r_0 v_0}{\eta} \simeq 600$$

C'est compatible avec un écoulement laminaire. Le modèle de l'écoulement parfait est pertinent, puisqu'il n'y a pas d'effet de cisaillement provoqué par des parois solides et que le nombre de Reynolds est grand devant l'unité.

2. L'eau dans le filet d'eau est en chute libre : $\dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{g}$. L'équation d'Euler

$$\rho\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\overrightarrow{g}$$

se réduit donc à

$$\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P$$

ce qui montre que la pression est uniforme dans le jet.

3. Le régime est permanent et l'écoulement est incompressible ; le débit volumique est donc le même à travers toute surface horizontale. On a donc

$$\pi r^2 v(z) = \pi r_0^2 v_0 \text{ soit } r^2 v(z) = r_0^2 v_0$$

La vitesse $v(z)$ est telle que

$$\frac{1}{2}v^2 + gz = \frac{1}{2}v_0^2 \text{ soit } v^2 = v_0^2 - 2gz$$

On en déduit que

$$r^4\left(v_0^2 - 2gz\right) = r_0^4 v_0^2 \text{ soit } z = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)$$

4. Lorsque le rayon devient inférieur à une valeur critique r_c, les effets de la tension superficielle tendent à favoriser la formation de gouttes, ce qui permet de minimiser l'aire interfaciale. L'altitude z_c correspondante est telle que

$$z_c = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{r_0^4}{r_c^4}\right)$$

Lorsque le débit augmente, $|z_c|$ augmente. Il faut toutefois que l'écoulement reste laminaire, sinon l'étude n'est plus pertinente : l'écoulement devient turbulent et n'est plus indépendant du temps.