Systèmes ouverts en régime stationnaire

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ Différencier la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$.

$\boxed{2}$ Différencier la fonction $s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$.

$\boxed{3}$ Montrer que $df = (2xy + b)dx + x^2 dy$ est une différentielle exacte. En déduire l'expression de $f(x,y)$ sachant que $f(0,0) = 0$.

$\boxed{4}$ On part de la relation $PV = nRT$ où n et R sont des constantes. Vérifier que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$

$\boxed{5}$ Différencier l'équation d'état des gaz parfait.

$\boxed{6}$ Donner la différentielle logarithmique de l'équation d'état des gaz parfaits.

$\boxed{7}$ Montrer que l'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter.

$\boxed{8}$ Montrer que les transferts thermiques se font du corps chaud vers le corps froid (énoncé de Clausius du second principe).

$\boxed{9}$ Rappeler la loi de Laplace en P et V ainsi que ses conditions d'application. En déduire les variantes en T, V et en T, P.
On considère n moles de gaz parfait, de coefficient γ, soumis seulement aux forces de pression, et qui subit une transformation adiabatique réversible. On rappelle que pour un gaz parfait $\mathscr{C}_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$. Montrer que $\dfrac{nR}{\gamma - 1}dT = -PdV$. En déduire que $VdP = -\gamma PdV$. Intégrer cette relation par séparation des variables et conclure.

$\boxed{10}$ Détente de Joule-Kelvin : un fluide s'écoule lentement à travers un bouchon poreux dans une conduite horizontale de section constante S. Le régime stationnaire est supposé atteint. Montrer que cette détente est isenthalpique.

$\boxed{11}$ Dans le cas d'un moteur ditherme, le système (Σ) cède du travail à l'extérieur.

1. Montrer que le système reçoit alors un transfert thermique de la source chaude et cède un transfert thermique à la source froide.
2. Définir l'efficacité thermodynamique du moteur.
3. Montrer que
$$e \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$
4. Calculer l'efficacité maximale obtenue dans le cas d'une machine réversible.
5. Donner l'allure du cycle (cycle de Carnot) dans un diagramme (T,S).
6. Dans le cas particulier d'un gaz parfait, donner l'allure du cycle dans un diagramme de Watt.

$\boxed{1}$ $df = 2\frac{x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$. $\boxed{2}$ $ds = S_0 \sin(\omega t - kx)(kdx - \omega dt)$. $\boxed{3}$ $f(x,y) = x^2 y + bx$. $\boxed{4}$ $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{nRT}{V^2}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P}$, $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{nR}$. $\boxed{5}$ $PdV + VdP = nRdT$. $\boxed{6}$ $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$. $\boxed{7}$ $dS = 0 + \delta S_{ech} \geq 0$. $\boxed{8}$ Il faut raisonner sur deux corps de températures différentes en contact thermique. $\boxed{9}$ Conditions : GP + réversible + adiabatique. $PV^\gamma = cste$, $P^{1-\gamma}T^\gamma = cste1$, $TV^{1-\gamma} = cste2$. $\boxed{10}$ cf cours. $\boxed{11}$ cf cours.

Exercices

1. Température d'un fil parcouru par un courant

À partir de l'instant $t = 0$, un fil est parcouru par un courant d'intensité constante i. On note R sa résistance et C sa capacité calorifique. Le fil est en contact thermique avec l'atmosphère, dont la température est constante et égale à θ_0. Le fil perd ainsi une quantité de chaleur par unité de temps proportionnelle à l'écart $\theta - \theta_0$ des températures du fil et de l'atmosphère.

1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $\theta(t)$.
2. Déterminer $\theta(t)$ si $\theta(t = 0) = \theta_0$.
3. Que se passe-t-il si le fil est parcouru par un courant alternatif ?

2. Étude d'une machine ditherme

On fait fonctionner un moteur thermique réversible entre :

- une source chaude constituée par une masse m_1 d'eau liquide à la température initiale θ_1^0 ;
- une source froide constituée par une masse m_2 d'eau liquide à la température initiale θ_2^0.

Le moteur cesse de fonctionner quand les deux sources sont à la même température. Calculer alors :

1. la température finale ;
2. l'énergie thermique totale Q_1 échangée avec la source chaude ;
3. l'énergie thermique totale Q_2 échangée avec la source froide ;
4. le travail fourni par le moteur.

On supposera que la capacité thermique c de l'eau est constante.
Application numérique : $m_1 = 1$ tonne ; $m_2 = 2$ tonnes ; $\theta_1^0 = 100^o$C ; $\theta_2^0 = 0^o$C ; $c = 4{,}18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}.

3. Neige artificielle

On obtient de la neige de culture en pulvérisant, à l'aide de canons à neige, de fines gouttes d'eau liquide à $T_1 = 0^o$C dans l'air ambiant qui est à $T_0 = -15^o$C.
On donne la masse volmique de l'eau liquide $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}, sa capacité thermique massique à pression constante $c_p = 4,18.10^3$ J.kg^{-1} et l'enthalpie massique de fusion de la glace $L_f = 335.10^3$ J.kg^{-1}. La goutte d'eau est supposée sphérique et de rayon $R = 0,2$ mm.

1. Dans un premier temps, la goutte se refroidit en restant liquide. Elle reçoit de l'air extérieur une puissance thermique par unité de surface $h(T_0 - T(t))$, où $T(t)$ est la température de la goutte. Établir l'équation dfférentielle vérifiée par la goutte.
2. En déduire la date t_s à laquelle la goutte atteint la température $T_s = -5^o$C.
   Effectuer l'application numérique pour $h = 65$ W.m^{-2}.K^{-1}.
3. À ce stade, la surfusion cesse : la goutte est partiellement solidifiée et sa température devient égale à $T_f = 0^o$C. Calculer la fraction x de liquide restant à solidifier en supposant que la transformation est très rapide et adiabatique. On néglige la variation de volume de la goutte pendant la transformation.
4. Au bout de combien de temps la goutte est-elle complètement solidifiée ?

4. Piscine et patinoire

On donne $l_f = 335$ kJ.kg^{-1} ; $c_{eau} = 4,18$ kJ.K^{-1}.kg^{-1} ; $c_{glace} = 2,10$ kJ.K^{-1}.kg^{-1}.

On étudie un complexe piscine-patinoire dont le chauffage et le refroidissement sont assurés en partie par une pompe à chaleur, au fonctionnement réversible, utilisant la piscine comme source chaude et la patinoire comme source froide. Lorsqu'elles sont en fonctionnement, la piscine est à la température $T_1 = 300$ K et la patinoire à la température $T_2 = 263$ K. Elles ont pour masses respectives d'eau : $m_1 = 2,0 \cdot 10^6$ kg et $m_2 = 2,5 \cdot 10^5$ kg. On part d'un état initial où les deux masses d'eau sont à la température $T_i = 280$ K.

1. Calculer numériquement les capacités thermiques C_1 de l'eau de la piscine et C_2 de l'eau de la patinoire lorsqu'elle est liquide et C_2' lorsque la patinoire est gelée.
2. Lorsque les deux masses d'eau sont liquides, établir une expression liant leur température à la température initiale. Calculer la température T_3 de la piscine lorsque l'eau encore liquide de la patinoire atteint $T_0 = 273$ K. Calculer W_3 le travail consommé par la pompe à chaleur.
3. On s'intéresse maintenant à la phase au cours de laquelle l'eau de la patinoire gèle. Établir l'expression de la température T_4 de la piscine lorsque l'eau de la patinoire est gelée et qu'elle est encore à la température T_0. Calculer W_4 le travail consommé par la pompe à chaleur.
4. Établir l'expression de la température T_5 de la piscine lorsque l'eau de la patinoire atteint T_2. Calculer W_5 le travail consommé par la pompe à chaleur.
5. L'élévation de température de T_5 à T_1 s'effectue par un chauffage direct. Calculer le transfert thermique Q_6 nécessaire.
6. La pompe à chaleur et le chauffage direct consomment la même puissance $P = 200$ kW. Quelle est la durée de mise en température du complexe ?

5. Étude d'un échangeur de chaleur

On considère un système Σ de capacité calorifique équivalente à une masse d'eau $\mu = 5$ kg. Ce dispositif est parcouru par deux canalisations dans lesquelles on peut faire circuler de l'eau. Dans toute la suite, l'atmosphère est à la température constante $\theta_{ext} = 20^o$C. Les échanges thermiques entre Σ et l'atmosphère sont proportionnels à la différence $\theta - \theta_{ext}$, où θ désigne la température de Σ.

1. En l'absence de circulation d'eau, Σ passe de 80^oC à 70^oC de l'instant 0 à l'instant $t_1 = 20$ min.
   (a) Établir l'expression de $\theta(t)$ à l'aide d'une constante de temps τ que l'on exprimera littéralement en fonction des données.
   (b) Calculer numériquement τ et la date t_2 pour laquelle $\theta(t_2) = 25^o$C.

2. À l'instant $t = 0$, Σ est en équilibre thermique avec l'atmosphère ; on envoie dans la première canalisation de l'eau à la température $\theta_1 = 100^o$C avec un débit massique $D_1 = 0,1$ kg/s. On considère que l'eau ressort de Σ à la température θ de Σ.
   (a) Donner l'expression de $\theta(t)$; on exprimera la relation entre la nouvelle constante de temps τ' et l'ancienne τ.
   (b) Calculer numériquement τ' ; la comparer à τ.
   (c) Calculer la température atteinte :
      — en régime permanent ;
      — au bout de 1 min.

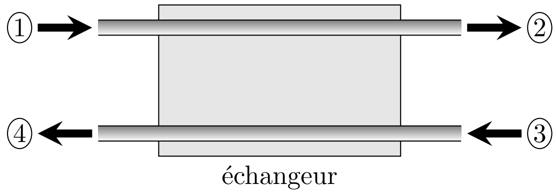
3. À l'instant $t = 0$, Σ est en équilibre thermique avec l'atmosphère ; on envoie le même courant d'eau dans la première canalisation, et dans la seconde de l'eau à la température $\theta_2 = 5^o$C avec un débit massique D_2. À la sortie de chacune des canalisations, l'eau est en équilibre thermique avec Σ.
   (a) Établir l'expression de $\theta(t)$; exprimer la nouvelle constante de temps.
   (b) Déterminer le débit D_2 qui conduit à une température de 30^oC en régime permanent.

6. Tuyère

Un gaz parfait de masse molaire M et de coefficient isentropique γ, s'écoule dans une tuyère calorifugée de révolution autour de l'axe Ox, de section variable $S(x)$ d'abord convergente puis divergente. Dans une section d'abscisse x, on note $v(x)$ la vitesse, $p(x)$ la pression, $T(x)$ la température, $h(x)$ l'enthalpie massique et $c(x) = \sqrt{\gamma RT(x)/M}$ la vitesse du son.

1. Montrer que $h(x) + v^2(x)/2$ est constante le long de la tuyère.
2. On néglige désormais la vitesse v_e à l'entrée devant la vitesse v_c au niveau du col et on suppose que la vitesse au niveau du col est confondue avec la vitesse c_c du son en ce point.
   Déterminer les paramètres p_c, T_c et v_c au niveau du col en fonction des paramètres T_e et p_e à l'entrée et des constantes γ, M et R. Calculer T_c et v_c pour $\gamma = 1,4$, $M = 29$ g.mol^{-1} et $T_e = 1000$ K.

7. Création d'entropie dans un échangeur de chaleur



On considère un échangeur thermique parcouru par deux circulations d'eau à contre courant. On suppose l'échangeur parfaitement calorifugé et les écoulements isobares et en régime permanent. On suppose que la capacité thermique à pression constante de l'eau est indépendante de la température. On note T_1 et T_3 les températures d'entrée, T_2 et T_4 les températures de sortie. On note D_m le débit massique dans la conduite $1 \to 2$ et D'_m le débit massique dans la conduite $3 \to 4$.

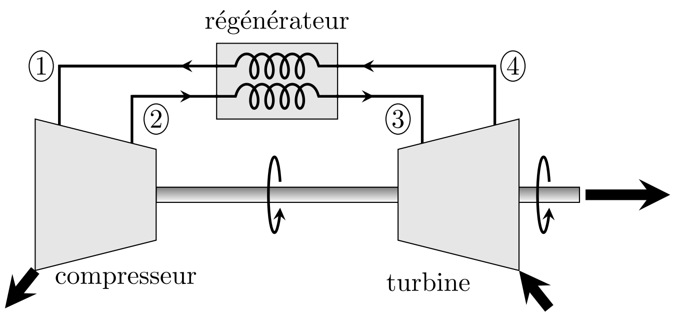
Données numériques :

$$T_1 = 90^o\text{C}; T_2 = 20^o\text{C}; T_3 = 10^o\text{C}; T_4 = 40^o\text{C}$$

$$D_m = 1,0 \text{ kg.s}^{-1}; c_p = 4,18.10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

1. Déterminer analytiquement puis calculer numériquement le débit massique D'_m.
2. Déterminer analytiquement puis calculer numériquement l'entropie créée par unité de temps dans l'échangeur.
3. Pour les valeurs précédentes de T_1, T_2 et D_m, peut-on trouver des valeurs de T_3, T_4 et D'_m telles que :
   — l'entropie créée par unité de temps dans l'échangeur soit nulle ?
   — l'entropie créée par unité de temps dans l'échangeur soit négative ?

8. Cycle d'Ericsson



Un gaz parfait circule en régime stationnaire dans une machine et subit le cycle de transformations suivant :

— $1 \to 2$: compression réversible isotherme à la température T_f de la pression P_1 à la pression $P_2 > P_1$;
— $2 \to 3$: échauffement isobare de T_f à $T_c > T_f$;
— $3 \to 4$: détente réversible isotherme à la température T_c de la pression P_2 à la pression P_1 ;
— $4 \to 1$: refroidissement isobare de T_c à T_f.

Les transformations $2 \to 3$ et $4 \to 1$ ont lieu à l'intérieur d'un régénérateur : échangeur thermique où le fluide échange de la chaleur avec lui-même. Le régénérateur est supposé isolé thermiquement de l'extérieur. On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. La turbine entraîne le compresseur, ainsi qu'un alternateur produisant de l'énergie électrique. On rappelle l'expression de l'entropie massique d'un gaz parfait en fonction de la température et de la pression :

$$s(T,P) = s(T_0,P_0) + c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{R}{M}\ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

1. Exprimer les transferts thermiques massiques q_{12} et q_{34} reçus par le gaz respectivement dans le compresseur et la turbine.
2. Exprimer les travaux massiques utiles $w_{u,12}$ et $w_{u,34}$ reçus par le gaz respectivement dans le compresseur et la turbine.
3. En déduire le rendement de la machine. Commenter.

Problème de concours

9. Étude du circuit secondaire d'une installation nucléaire REP

Ce sujet comporte un document réponse à rendre avec la copie. Les données numériques utiles sont fournies en fin d'énoncé.

La France compte 19 centrales nucléaires en exploitation, dans lesquelles tous les réacteurs (58 au total) sont des réacteurs à eau pressurisée. Actuellement, ces installations produisent près de 80% de l'électricité produite en France. Chaque centrale est soumise à un référentiel de normes de sureté et de sécurité évoluant en fonction des enseignements des incidents passés nationaux ou internationaux.

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects liés au fonctionnement d'une centrale nucléaire REP, ainsi que plusieurs dispositions prises en matière de sureté nucléaire : contrôle des rejets de la centrale et surveillance sismique d'un site nucléaire.

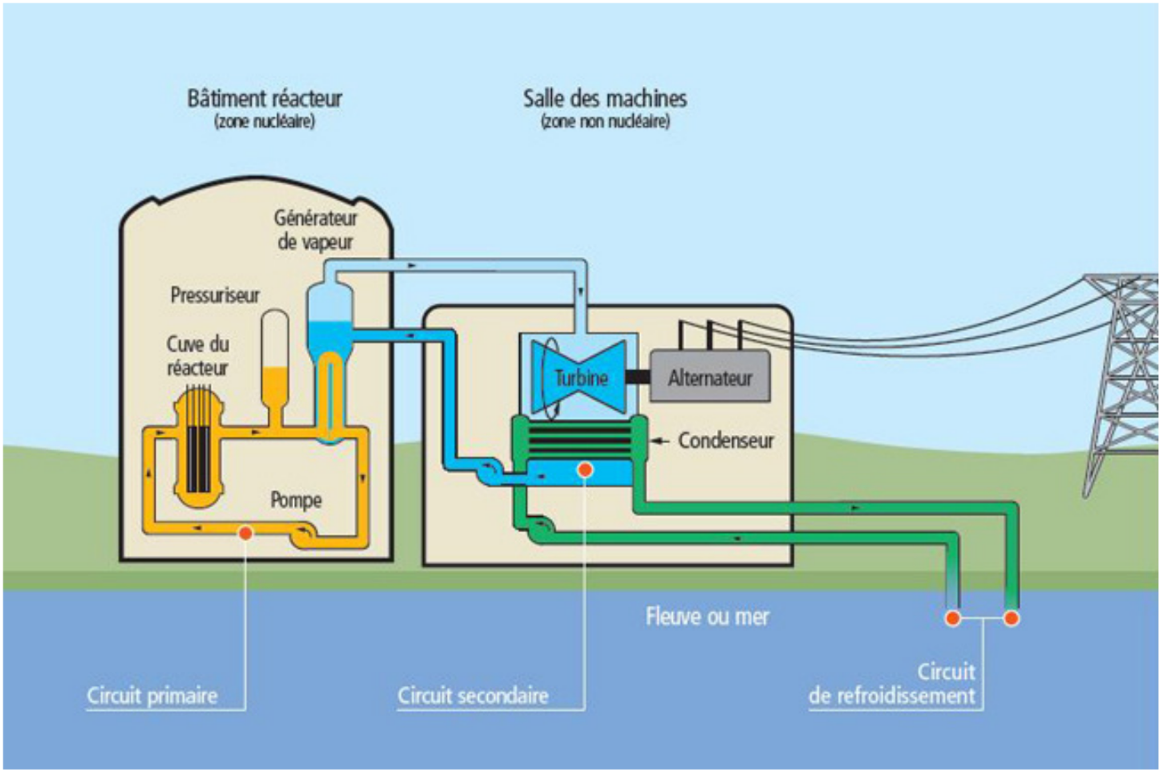


FIGURE 1 – Schéma global d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d'électricité, qui utilise comme chaudière un réacteur nucléaire pour produire de la chaleur. Une centrale nucléaire REP (Réacteur à Eau Pressurisée) est constituée de deux grandes zones (voir figure 1) :

— une zone non nucléaire (salle des machines). Dans cette partie, semblable à celle utilisée dans les centrales thermiques classiques, s'écoule de l'eau dans un circuit secondaire. Cette eau est évaporée dans le Générateur de Vapeur (GV) par absorption de la chaleur produite dans la zone nucléaire, puis elle entraine une turbine (T) couplée à un alternateur produisant de l'électricité, ensuite elle est condensée au contact d'un refroidisseur (rivière ou mer ou atmosphère via une tour aéroréfrigérante) et enfin, elle est comprimée avant d'être renvoyée vers le générateur de vapeur ;

— une zone nucléaire (dans le bâtiment réacteur), où ont lieu les réactions nucléaires de fission, qui produisent de l'énergie thermique et chauffent ainsi l'eau sous pression circulant dans le circuit primaire. Le transfert d'énergie thermique entre le circuit primaire et le circuit secondaire se fait dans le générateur de vapeur, où la surface d'échange entre les deux fluides peut atteindre près de 5000 m^2 (réseau de tubulures).

Description du circuit secondaire de la centrale

Considérons une centrale nucléaire REP produisant une puissance électrique $P_e = 900$ MW. Le fluide circulant dans le circuit secondaire est de l'eau, dont l'écoulement est supposé stationnaire. Le cycle thermodynamique décrit par l'eau est un cycle ditherme moteur. L'eau liquide sera supposée incompressible et de capacité thermique massique isobare supposée constante. Le tableau en fin d'énoncé donne diverses données thermodynamiques relatives à l'équilibre liquide–vapeur de l'eau.

1 Cycle de Carnot

Dans une première approche simplifiée, on considère le moteur ditherme de Carnot fonctionnant de manière réversible entre deux sources de température T_{ch} et T_{fr} ($T_{\text{fr}} < T_{\text{ch}}$).

a) Donner, en la redémontrant, l'expression du rendement de Carnot associé à ce cycle.
b) Donner la valeur numérique de ce rendement en prenant $T_{\text{ch}} = 543$ K et $T_{\text{fr}} = 303$ K, les deux températures extrêmes de l'eau dans le circuit secondaire.
c) Sachant qu'un réacteur REP fournit à l'eau du circuit secondaire, via le générateur de vapeur, une puissance thermique $P_t = 2785$ MW, que vaut le rendement thermodynamique réel de l'installation ? On supposera que la puissance mécanique transmise à la turbine est intégralement convertie en puissance électrique. Commenter.

2 Cycle de Rankine

L'eau du circuit secondaire subit les transformations suivantes (représentées dans la figure 2)
- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55$ bar jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (état B) ;
- de B à C : détente adiabatique réversible dans la turbine, de la pression P_2 à la pression $P_1 = 43$ mbar ;
- en C, le fluide est diphasé ;
- de C à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2, du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.

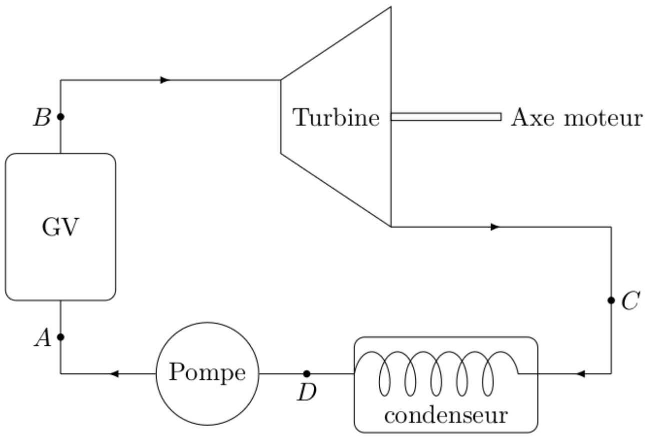


FIGURE 2 – Cycle de Rankine

a) Représenter dans le diagramme de Clapeyron (P, v) l'allure de la courbe de saturation de l'eau, ainsi que les isothermes T_B, T_D et T_{critique}, cette dernière température étant celle du point critique de l'eau. Préciser les domaines du liquide, de la vapeur, de la vapeur saturante. Représenter sur ce même diagramme l'allure du cycle décrit par l'eau du circuit secondaire. Indiquer le sens de parcours du cycle et placer les points A, A', B, C et D.
b) D'après l'extrait de table thermodynamique donné en fin d'énoncé, quelles sont les valeurs des températures, des enthalpies massiques et des entropies massiques aux points A', B et D ? On pourra donner les valeurs sous forme de tableau.
c) Dans le document réponse figure le diagramme enthalpique (P, h) de l'eau. Placer, avec soin et à l'échelle, les points A', B, C, D du cycle. On explicitera la méthode.

d) Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle dans les bilans énergétiques. Exprimer alors, sans démonstration, le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q.

e) Exprimer le travail massique w_{BC} reçu par l'eau dans la turbine. Donner sa valeur numérique, en s'aidant du diagramme enthalpique.

f) Exprimer le transfert thermique massique $q_{AA'}$ reçu par l'eau liquide quand elle passe de manière isobare de la température T_A à la température $T_{A'}$ dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique : on considérera $T_A \approx T_D$.

g) Exprimer le transfert thermique massique $q_{A'B}$ reçu par l'eau quand elle se vaporise complètement dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique.

h) Calculer alors le rendement de Rankine de l'installation. Comparer au rendement de Carnot et commenter. Comparer au rendement réel et commenter.

i) Dans quel état se trouve l'eau à la fin de la détente de la turbine ? Donner le titre massique en vapeur à l'aide du diagramme enthalpique. En quoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la turbine ?

Données

Extrait de table thermodynamique relatif à l'équilibre liquide–vapeur de l'eau

θ (^{o}C)	P_{sat} (bar)	Liquide saturant			Vapeur saturante sèche		
		v_ℓ (m^3·kg^{-1})	h_ℓ (kJ·kg^{-1})	s_ℓ (J·K^{-1}·kg^{-1})	v_v (m^3·kg^{-1})	h_v (kJ·kg^{-1})	s_v (J·K^{-1}·kg^{-1})
30	0,043	1,0047	125,22	0,4348	32,892	2555,92	8,4530
180	10	1,1276	763,18	2,1395	0,119404	2777,84	6,5854
270	55	1,3053	1190,10	2,9853	0,03505	2788,46	5,9226

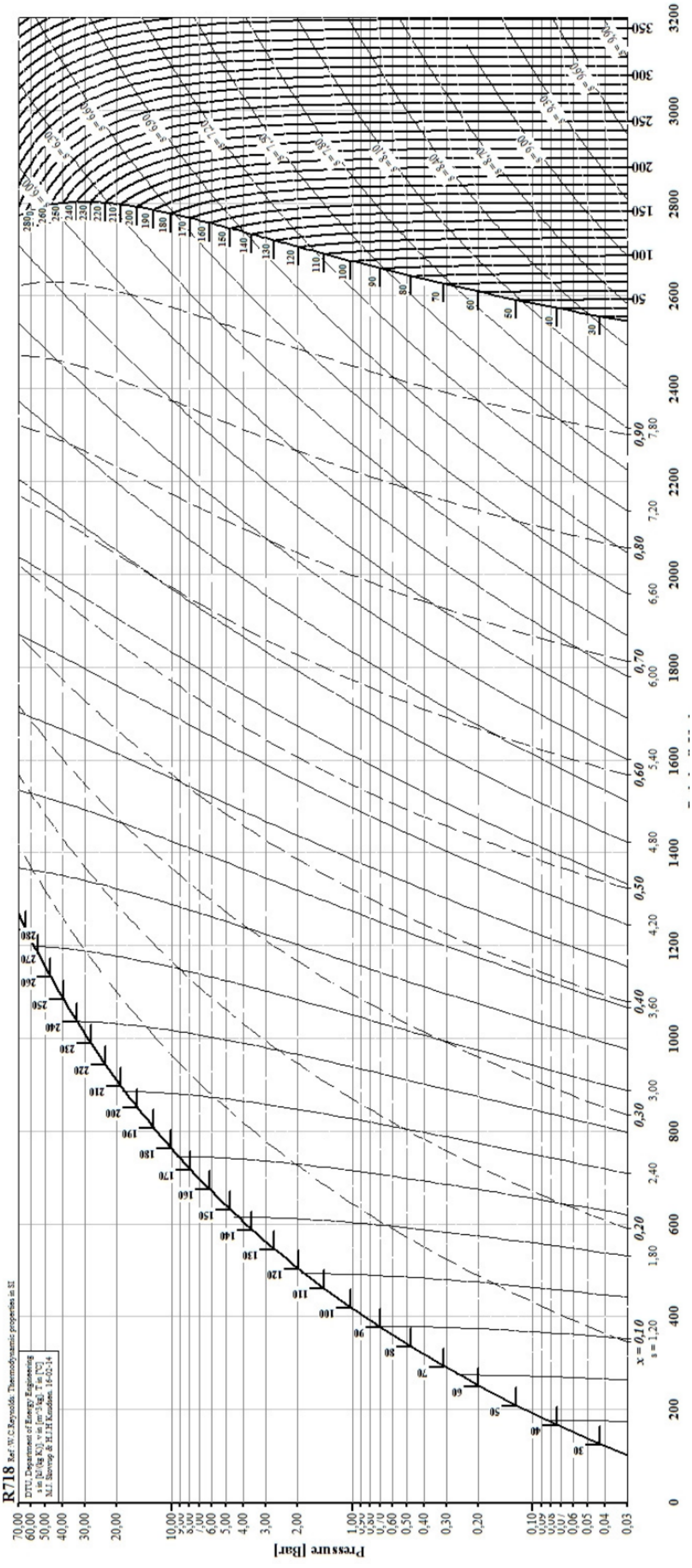
θ	température	s_ℓ	entropie massique du liquide saturant
P_{sat}	pression de vapeur saturante	v_v	volume massique de la vapeur saturante sèche
v_ℓ	volume massique du liquide saturant	h_v	enthalpie massique de la vapeur saturante sèche
h_ℓ	enthalpie massique du liquide saturant	s_v	entropie massique de la vapeur saturante sèche

Capacité thermique massique isobare de l'eau

$$c = 4,18 \text{ kJ·K}^{-1}\text{·kg}^{-1}$$

Constantes diverses

Constante des gaz parfaits	$R = 8,314$ J·K^{-1}·mol^{-1}
On prendra	0^oC = 273 K


R718
Pressure [Bar]