Diffusion de particules

Applications directes du cours

1. Soit $n(x,t) = n_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$, la densité de particules diffusantes dans un tube d'axe Ox (x est compris entre 0 et h). On note S la section du tube, h sa longueur et D coefficient de diffusion.
   1. Exprimer le nombre total de particules contenues dans le tube.
   2. Exprimer le vecteur densité de courant de particules $\overrightarrow{j_N}$.
   3. Exprimer le flux par unité de temps des particules qui traversent la surface S placée en $x = h/2$.
2. Connaissant l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion d'un gaz dans l'air estimer l'ordre de grandeur de la durée que met un parfum à être décelé à une distance de 10 cm du flacon que l'on vient d'ouvrir, puis à une distance de 1 m.
3. On étudie un gaz enfermé dans un tube cylindrique de section S et de longueur ℓ en régime stationnaire. Établir l'expression de $n(x)$ lorsque le tube est fermé aux deux extrémités et qu'il contient un nombre N_0 de particules.
   Établir l'expression de $n(x)$ lorsque le tube est ouvert aux deux extrémités avec des densités particulaires imposées $n(x=0) = n_1$ et $n(x=\ell) = n_2 > n_1$. Exprimer $\overrightarrow{j_N}$.
4. Dans les trois système de coordonnées calculer la divergence du vecteur position.
5. On considère le vecteur $\vec{v}(x,y,x) = (2x+y^2)\vec{e}_x + (x-z)\vec{e}_y + (3x^2-2z)\vec{e}_z$. Calculer sa divergence.
6. Soit le vecteur $\vec{v}(r,\theta,z) = (3r+\frac{2}{r})\vec{e}_\theta$ en cylindrique. Calculer sa divergence.
7. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)$ pour $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + 2z$.

$\boxed{1}$ 1. $N = Sn_0a(1-e^{-h/a})$, 2. $\vec{j}(x) = \frac{Dn_0}{a}e^{-x/a}\vec{e}_x$, 3. $\Phi(h/2) = \dfrac{Dn_0S}{a}e^{-h/2a}$. $\boxed{2}$ $\tau_{10\mathrm{cm}} \simeq 10^3$ s, $\tau_{1\mathrm{m}} \simeq 10^5$ s. $\boxed{3}$ Tube fermé $n(x) = \frac{N_0}{S\ell}$, tube ouvert $n(x) = n_1 + (n_2-n_1)\dfrac{x}{\ell}$ et $\vec{j} = D\frac{n_1-n_2}{\ell}\vec{e}_x$. $\boxed{4}$ $\mathrm{div}\,\overrightarrow{OM} = 3$. $\boxed{5}$ $\mathrm{div}\,(\vec{v}) = 0$. $\boxed{6}$ $\mathrm{div}\,(\vec{v}) = 0$. $\boxed{7}$ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{1}{y}\vec{e}_x - \frac{x}{y^2}\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$.

Exercices

1. Étalement

1. Montrer que $n(x,t) = \dfrac{N_0}{S\sqrt{4\pi Dt}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{4Dt}}$ vérifie l'équation de diffusion à une dimension $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.
2. Étude de la fonction.
   (a) Montrer que $n(x,t)$ à t fixée est paire.
   (b) Calculer $\Delta x(t)$ la largeur à mi-hauteur, telle que $n\left(\pm\dfrac{\Delta x(t)}{2}, t\right) = \dfrac{n(0,t)}{2}$.
   (c) Tracer l'allure de $n(x,t)$ en fonction de x à plusieurs dates t.
   (d) Comment varie la largeur à mi-hauteur $\Delta x(t)$ avec t ?
   (e) Retrouver un équivalent de $\Delta x(t)$ en utilisant l'équation de diffusion.

2. Dialyse

1. De l'urée diffuse en régime stationnaire avec un coefficientde diffusion D à travers une membrane d'épaisseur e et de section S. Exprimer le flux d'urée en fonction de S, D, e et des densités particulaires n_1 et n_2 de part et d'autre de la membrane.
2. La membrane sert à dialyser du sang contenu dans un récipient de volume V en le reliant à un récipient de volume $2V$ contenant initialement de l'eau pure. On donne la densité volumique initiale n_0 d'urée dans le sang. En admettant que le résultat de la question 1) reste valable, établir les équations différentielles dont sont solutions les nombres de molécules d'urée $N_1(t)$ et $N_2(t)$ dans les deux compartiments.
3. En déduire la durée T nécessaire pour que la concentration en urée dans le sang soit divisée par deux.

3. Réaction nucléaire

On considère un barreau cylindrique d'uranium de hauteur h et de rayon $R = 5$ cm. Ce barreau est le siège d'une réaction nucléaire générant ξ neutrons par unité de temps et par unité de volume (ξ est supposé homogène dans le barreau). On néglige l'absorption dans le barreau. On considère que les neutrons radioactifs sont totalement bloqués en $z = 0$ et $z = h$ de sorte que le flux de particules est radial. On mesure un flux surfacique de neutrons sortant du barreau de $j_N = 108$ cm^{-2}.s^{-1}.

1. Établir une équation de conservation macroscopique reliant la quantité de neutron $N(t)$ à l'intérieur du barreau à j_N, ξ, R et h.
2. On suppose que l'on est en régime stationnaire. Que peut-on dire de N ? En déduire la valeur numérique de ξ.

4. Équilibre de sédimentation

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique ρ, dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique ρ_0 ($\rho_0 > \rho$), supposées sphériques.
La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date $t = 0$. À partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient. Nous supposerons que le mouvement unidirectionnel vertical et que les macromolécules sont soumises, entre autres, à une force de type visqueux $\overrightarrow{F} = -\lambda \overrightarrow{v}$ avec λ constante positive.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule (on considérera un axe Oz vertical ascendant, l'origine O coïncidant avec le fond du récipient).
2. Montrer que ces particules atteignent une vitesse limite v_{lim} que l'on exprimera en fonction de m, g, λ, ρ et ρ_0.
3. La vitesse limite étant supposée atteinte très rapidement, donner l'expression du vecteur densité de courant d'entraînement des macromolécules j_e à la cote z en fonction de $n(z)$ et v_{lim} (j_e correspondant au nombre de macromolécules traversant une surface unité horizontale pendant l'unité de temps).
4. La sédimentation ayant entraîné une inhomogénéité de la solution, le phénomène de diffusion apparaît. On admet que la densité de flux de diffusion molaire $\overrightarrow{j_{\text{diff}}}$ des particules est donnée par la loi de Fick :
$$\overrightarrow{j_{\text{diff}}} = -D\frac{\partial n}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$$
Dans quel sens la diffusion se produit-elle ?
5. En régime stationnaire, quelle relation peut-on écrire entre les deux densités de flux ? En déduire la loi de variation de $n(z)$ avec z.
6. Cet équilibre est utilisé pour la mesure de masses de macromolécules. Si on mesure, par des mesures optiques, à 25^{o}C :
$$\frac{n(z=0)}{n(z=2\text{ cm})} = 2$$
Quelle est la masse molaire des macromolécules et la valeur de leur rayon ?

On donne : $D = \dfrac{k_B T}{\lambda}$; $\rho = 1000$ kg.m^{-3} et $\rho_0 = 1250$ kg.m^{-3}.

5. Diffusion dans un tuyau poreux

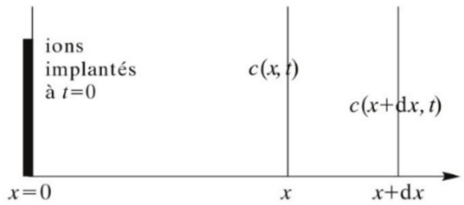
On étudie l'état stationnaire de diffusion gazeuse dans un tuyau cylindrique d'axe (Oz), de rayon a et de longueur L très grande devant a. Les concentrations des molécules sont maintenues constantes aux deux extrémités du tuyau

avec : $n(x=0) = n_0$ et $n(x=L) = 0$. On note D le coefficient de diffusion des molécules.
Le tube est légèrement poreux : les molécules peuvent s'échapper vers l'extérieur à travers la paroi latérale du tuyau d'épaisseur $e \ll a$. Cette diffusion est caractérisée par le coefficient de diffusion $D' \ll D$. On supposera que la densité de particules varie linéairement dans l'épaisseur du tube et qu'elle est nulle hors du tube : $n_{ext} = 0$.

1. En comparant les temps caractéristiques de diffusion axiale et radiale, justifier le fait qu'on peut considérer que $n(r,z,t) \simeq n(z,t)$ au sein du tuyau.
2. Déterminer les projections $j_{N,z}(z,t)$ et $j_{N,r}(r=a,z,t)$ du vecteur densité de courant $\overrightarrow{j_N}$ à la surface intérieure latérale du tuyau.
3. Établir l'équation différentielle en $n(z,t)$ au sein du tuyau.
4. Résoudre l'équation différentielle en régime stationnaire.
5. Étudier le cas où $D' \longrightarrow 0$. Commentaire.

6. Diffusion d'atomes dans un solide

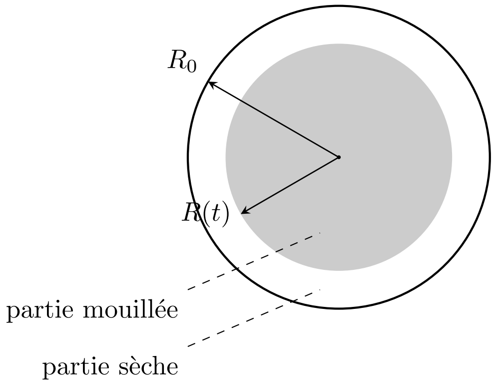
On utilise très souvent les phénomènes de diffusion pour la fabrication des transistors dans l'industrie microélectronique. La diffusion d'atomes tels que le Bore dans un substrat de silicium permet, par exemple, de modifier considérablement les propriétés électriques de ce dernier. Le plus souvent, les processus de diffusion ont lieu à des températures élevées. Ainsi, les atomes se trouvent « figés »lorsque le dispositif est ramené à température ambiante. La longévité du dispositif est ainsi assurée.
On se propose ici d'établir les lois expliquant la diffusion des atomes dans les solides.



1. Rappeler l'expression de la loi de Fick. Quelle est la dimension du coefficient de diffusion D ?
2. Établir, grâce à une loi de conservation, une autre relation liant j et c.
3. En déduire l'équation de diffusion.
4. À l'instant initial, la concentration d'atomes est nulle partout sauf sur une faible épaisseur située en $x = 0$. Soit Q le nombre de moles de particules implantées à la surface du matériau par unité de surface sur cette très faible épaisseur. Au cours du processus de diffusion, la quantité de particules Q présentes dans le matériau reste constante (aucun atome ne quitte le matériau). On montre alors que la concentration de particules dans le matériau au cours de la diffusion est :
$$c(x,t) = B(t)e^{-\frac{x^2}{A(t)}}$$
À l'aide de l'équation de la diffusion, en utilisant les conditions initiales et la conservation de la quantité d'atomes pendant la diffusion, montrer que l'on peut écrire :
$$A(t) = 4Dt \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{K}{\sqrt{t}}$$
Donner l'expression de K en fonction de Q et D. On rappelle que $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\pi}{2}$.
5. Déterminer la profondeur de diffusion h pour laquelle $c(h,t) = \frac{c(0,t)}{e}$. Au bout d'une heure, la profondeur de diffusion vaut 5 μm, donner la valeur du coefficient des atomes de bore dans le silicium.

7. Éponge

On étudie le séchage d'une éponge sphérique, entièrement mouillée à l'état initial, modélisée par le schéma ci-dessous. On suppose la température T et le volume V de l'éponge constants. On note P_{ext} la pression partielle en vapeur d'eau à l'extérieur, $P_{v,sat}$ la pression de vapeur saturante de l'eau, D le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau.



Donnée : pour tout r tel que $R(t) < r < R_0$ (i.e. la partie sèche), la densité particulaire d'eau $n^*(r,t)$ vérifie, en régime permanent :

$$\frac{\partial n^*}{\partial r} = -\frac{\phi}{4\pi D r^2}$$

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $R(t)$; en déduire l'expression de τ, temps de séchage de l'éponge.
2. Application numérique : on prend pour coefficient de diffusion le coefficient de diffusion de l'eau dans l'air, soit $D = 2 \cdot 10^{-5}$ m^2.s^{-1}, la pression de vapeur saturante $P_{v,sat} = 3,2 \cdot 10^3$ Pa à 25^{o}C, et une pression partielle à l'extérieur correspondant à 20% d'humidité, soit $P_{ext} = 0,2 \times P_{v,sat} = 0,64 \cdot 10^3$ Pa. Déterminer la valeur numérique du temps de séchage d'une éponge sphérique de rayon $R_0 = 10$ cm.

$\boxed{1}$ 1. À faire ; 2. (a), (b)$\Delta x = 4\sqrt{Dt\ln(2)}$, (d) Δx varie comme $\sqrt{t}$, (e) Cours.

$\boxed{2}$ 1. $\Phi = \dfrac{DS}{e}(n_1 - n_2)$; 2. $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{3DS}{2eV}N_1 = \dfrac{DS}{2e}n_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{3DS}{2eV}N_2 = \dfrac{DS}{e}n_0$; $\tau = \dfrac{2eV}{3DS}\ln(4)$.

$\boxed{3}$ 1. $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \pi Rh(R\xi - 2j_N)$; 2. $\xi = 10,8$ cm^{-3}·s^{-1}.

$\boxed{4}$ 1. $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \lambda\vec{v} = m\vec{g}\left(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$; 2. $\vec{v}_{lim} = \dfrac{m}{\lambda}\vec{g}\left(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$; 3. $\vec{j_e} = n(z)\dfrac{m}{\lambda}\vec{g}\left(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1\right)$; 4. Vers le haut ; 5. Conservation du flux de particules. Au fond le flux est nul. $\vec{j_e} + \overrightarrow{j_{diff}} = \vec{0}$, $n(z) = A\exp(\dfrac{-z}{\delta})$ avec $\delta = \dfrac{\lambda D}{mg}(\dfrac{\rho_0}{\rho_0 - \rho})$; 6. $M = 43,3$ g.mol^{-1}, $R = 2,4$ nm.

$\boxed{5}$ 1. ; 2. $\vec{j_N}(a,z,t) = -D\dfrac{\partial n(z,t)}{\partial x}\vec{u_z} + D'\dfrac{n(x,t)}{e}\vec{u_r}$; 3. $D\dfrac{\partial^2 n}{\partial z^2} - \dfrac{2D'}{ae}n = \dfrac{\partial n}{\partial t}$; 4. $n(x) = n_0\dfrac{\mathrm{sh}(\frac{L-x}{\delta})}{\mathrm{sh}\frac{L}{\delta}}$; 5. Affine.

$\boxed{6}$ 1. Cours ; 2. $\dfrac{\partial c}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}$; 3. $\dfrac{\partial c}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}$; 4. $K = \dfrac{Q}{\Pi S\sqrt{D}}$; 5. $D = 1,7 \cdot 10^{-15}$ m^2·s-1.

$\boxed{7}$ 1. $\dfrac{P_{ext} - P_{v,sat}}{k_B T} = -\dfrac{n}{D}\left(\dfrac{R^2(t)}{R_0} - R(t)\right)\dfrac{dR(t)}{dt}$, $\tau = \dfrac{nk_BTR_0^2}{6D\,(P_{v,sat} - P_{ext})}$; 2. 45 jours.

Résolution de problème

1. Mesure du coefficient de diffusion de l'eau

Pour mesurer le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air, on réalise le dispositif suivant :
un tube de section $S = 20$ cm^2 et de longueur $L = 1,0$ m plonge dans un récipient rempli d'eau à $T = 25$°C. L'eau s'évapore et la vapeur d'eau diffuse à travers l'air dans le tube. À l'extrémité supérieure du tube, un ventilateur souffle un courant d'air sec pour chasser la vapeur d'eau.
On constate que la masse d'eau évaporée par jour est de 87 mg.
On donne la pression de vapeur saturante de l'eau à 25°C : $P_{sat} = 3,2 \cdot 10^3$ Pa.
Déterminer le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air.