Première partie

Croissance d'une bulle de champagne

1. $\phi(r,t)$ est le flux de molécules de CO_2 à travers la sphère de rayon r selon $+\vec{u}_r$.
Par définition de $\vec{j}(r,t)$, $d\phi(r,t) = \vec{j}(r,t)\cdot\vec{dS} = j(r,t)dS$. Il vient

$$\boxed{\phi(r,t) = 4\pi r^2\, j(r,t)}$$

2. En régime stationnaire, il y a conservation du flux, on a donc $\phi = \text{cste} = \phi_0$. Il vient $j(r) = \dfrac{\phi_0}{4\pi r^2}$. Or, d'après la loi de Fick, $\vec{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,C$ soit $j(r) = -\,D\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r}(r)$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\phi_0}{4\pi D r^2}$,

$$\boxed{C(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}}$$

3. D'après les conditions aux limites, on a $C(r=a,t) = \dfrac{\chi p_e}{k_B T}$ et $C(r=\infty,t) = \dfrac{\chi p_i}{k_B T}$; on en déduit :

$$\boxed{C(r,t) = \frac{\chi p_i}{k_B T} + \frac{\chi(p_e - p_i)a(t)}{r k_B T}}$$

4. On s'intéresse au système bulle de CO_2 de rayon $a(t)$. Entre t et $t+dt$, on a $\mathrm{d}N_g = -\phi(a)dt$, soit $\dfrac{\mathrm{d}N_g}{\mathrm{d}t} = -4\pi a(t)^2 j(a(t)) = 4\pi a(t)^2 D\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r}(a) = 4\pi a(t)^2 D\dfrac{\chi(p_e-p_i)a(t)}{a(t)^2 k_B T}$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N_g}{\mathrm{d}t} = 4\pi D\,\chi\,(p_i - p_e)\frac{a(t)}{k_B T}}$$

5. D'après l'équation d'état des gaz parfaits ; $p_e\dfrac{4}{3}\pi a(t)^3 = N_g k_B T$, soit $N_g(t) = \dfrac{4\pi p_e a^3(t)}{3k_B T}$. En dérivant la relation précédente par rapport au temps, on obtient $4\pi p_e a^2(t)\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}N_g}{\mathrm{d}t}k_B T$, avec $\dfrac{\mathrm{d}N_g}{\mathrm{d}t} = 4\pi D\,\chi\,(p_i - p_e)\dfrac{a(t)}{k_B T}$. Il vient

$$p_e a(t)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \chi\, D\,(p_i - p_e)$$

D'où $K = \dfrac{\chi\, D\,(p_i - p_e)}{p_e}$.

6. On a, par intégration :

$$a^2(t) - a_0^2 = 2K\,t$$

AN : $K = 4,2.10^{-9}$ m^2.s^{-1} ; $\tau = (a_1^2 - a_0^2)/2K = 1,2.10^{-2}$ s