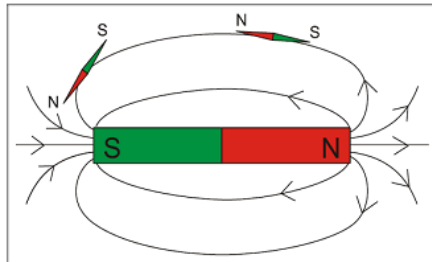
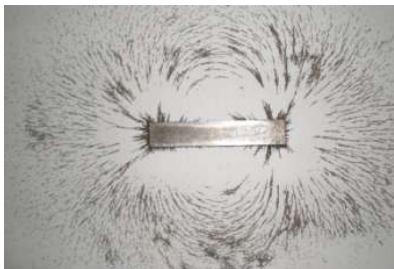


Champ magnétique

## I Cartes de champ magnétique

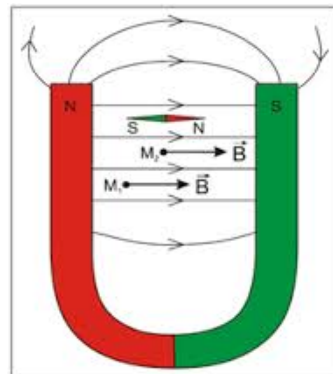
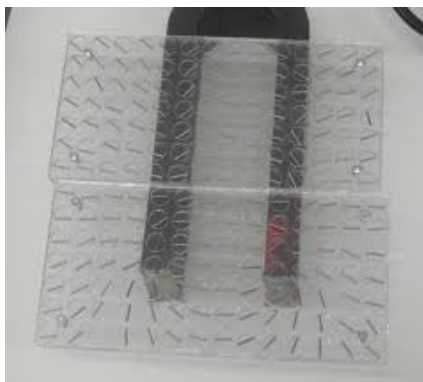
La limaille de fer a la propriété de pouvoir s'orienter dans le champ magnétique : elle permet ainsi de visualiser les lignes de champ magnétique.

### 1 Champ créé par un aimant droit



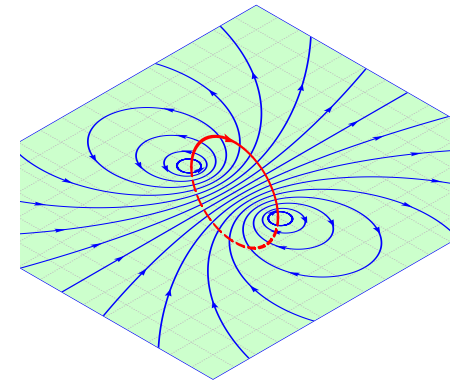
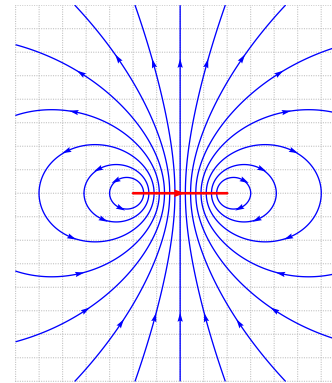
Les lignes de champ sont orientées de manière arbitraire du pôle nord vers le pôle sud.

### 2 Champ créé par un aimant en U

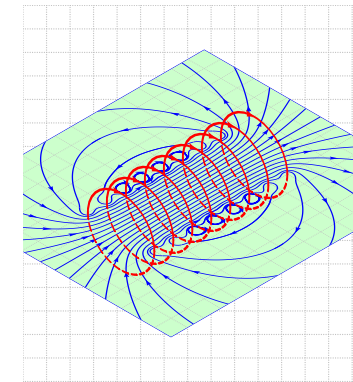
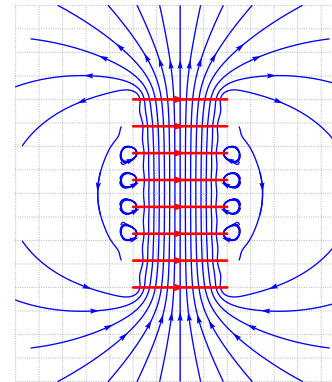


Dans l'entrefer le champ magnétique est à peu près uniforme.

### 3 Champ créé par une spire circulaire de courant



### 4 Champ créé par une bobine



### 5 Topographie du champ magnétique

- Les lignes de champ magnétique sont, dans la plupart des cas, des **courbes fermées** qui entourent les fils parcourus par le courant qui crée le champ magnétique.
- L'orientation des lignes de champ est liée au sens du courant dans les fils par la **règle de la main droite**.
- Le champ magnétique est plus intense là où les lignes de champ se resserrent.

Ordres de grandeurs :

- Champ magnétique terrestre :  $4,7 \cdot 10^{-5}$  T
- Aimants droits usuels : 10-100 mT,
- Aimants néodyme-fer-bore : 1 T,
- appareil IRM : 3-6 T.

## II Le moment magnétique

Une spire, une bobine, un aimant droit admettent tous les trois des lignes de champ de même allure à grande distance. On introduit, pour décrire leur effet à grande distance, le moment magnétique.

### 1 Moment magnétique

Soit un circuit filiforme plan de vecteur surface  $\vec{S} = S\vec{n}$  parcouru par un courant d'intensité  $i$  ( $i$  oriente  $\vec{n}$  par la règle de la main droite). Le moment magnétique associé à cette boucle de courant est défini par

$$\vec{\mathcal{M}} = i \vec{S}$$

Unité :  $\|\vec{\mathcal{M}}\|$  s'exprime en A.m<sup>2</sup>.

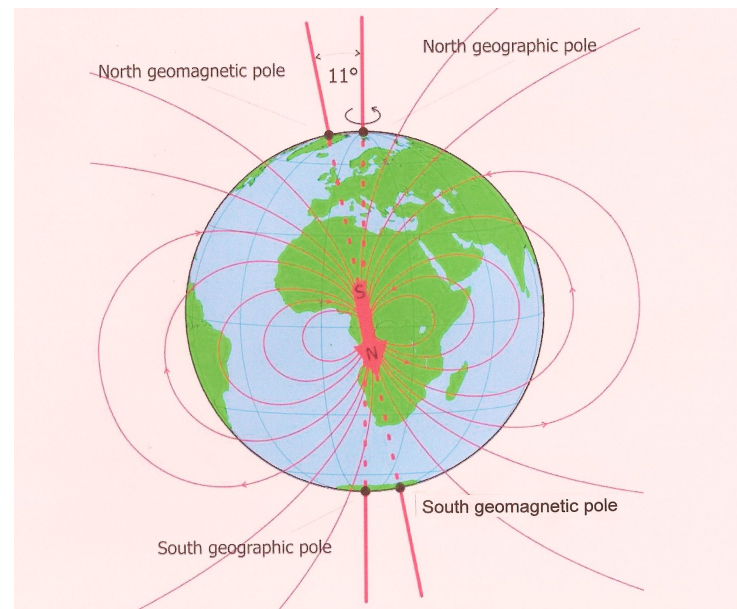
Remarque : pour un ensemble de  $N$  spires jointives parcourues par un courant d'intensité  $I$  :  $\vec{\mathcal{M}} = NI \vec{S}$

### 2 Moment magnétique d'un aimant

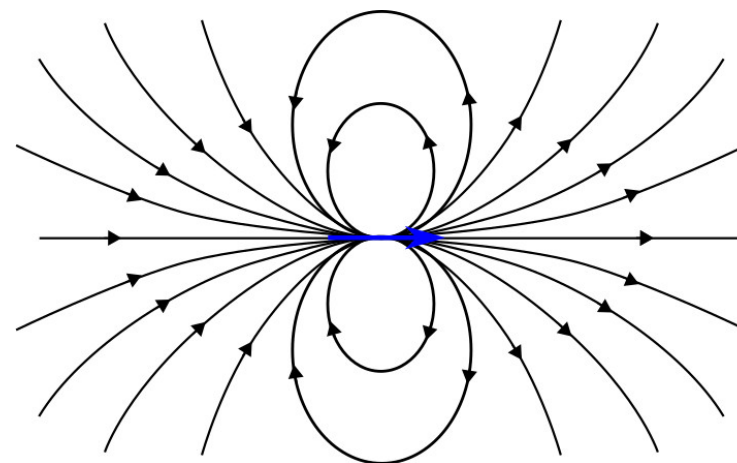
On peut définir un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  pour un aimant droit permanent.

Ordre de grandeur : pour les aimants usuels  $\|\vec{\mathcal{M}}\| = 10$  A.m<sup>2</sup>.

### 3 Moment magnétique terrestre



### 4 Champ créé



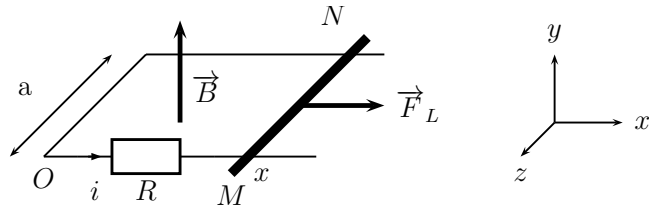
# Actions d'un champ magnétique

## I Force de Laplace

Lorsqu'un courant de particules chargées circule dans une zone où règne un champ magnétique, ces particules sont soumises à une action magnétique : la **force de Lorentz**. Cette action se traduit globalement sur le circuit lui-même par la **force de Laplace**.

### 1 Expérience du rail de Laplace

On s'intéresse ici à l'exemple d'une tige en translation sur deux rails horizontaux, l'ensemble étant plongé dans un champ magnétique extérieur, uniforme, stationnaire et vertical (voir figure). Un dispositif non représenté (générateur) provoque le passage d'un courant  $i$  dans ce circuit (résistif).



Observations :

- En l'absence de courant  $i$  la tige est immobile.
- Quand  $i \neq 0$  la tige se déplace.
- Le sens de déplacement de la tige dépend du sens du courant et du sens de  $\vec{B}$ .

### 2 Expression de la force de Laplace

La force de Laplace à laquelle la tige est soumise est  $\vec{F}_L = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}$  avec  $\ell$  longueur du conducteur (rectiligne) soumis à la force de Laplace et  $\vec{\ell}$  orienté comme  $i$ .

Ici, cela donne  $\vec{F}_L = iaB\vec{e}_x$ .

Point d'application : le milieu du segment  $MN$ .

### 3 Puissance de la force de Laplace

Pour un déplacement de la tige de vitesse  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ , la puissance de la force de Laplace est

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = iaBv.$$

## II Couple magnétique

On définit un moment magnétique associé à un circuit parcouru par un courant  $i$  :

$$\vec{\mathcal{M}} = i \vec{S}$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur surface du circuit. Ce vecteur surface a pour norme la surface du circuit ( $S = ax$  dans l'exemple précédent) et pour direction la normale au plan du circuit, orienté par le sens du courant et la règle de la main droite.

### 1 Couple exercé sur un moment magnétique

L'action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un moment magnétique est un couple de moment :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

### 2 Puissance

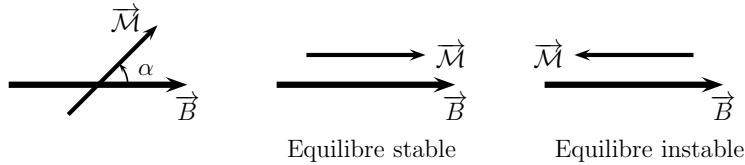
Ce couple provoque éventuellement la rotation, de vitesse angulaire  $\omega$  du moment magnétique (et donc du circuit ou de l'aimant) autour d'un axe ( $Oz$ ) orthogonal à  $\vec{B}$ , avec une puissance

$$\mathcal{P}_L = \Gamma_{Lz}\omega = \mathcal{M}B\omega \sin \alpha$$

où  $\alpha$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$ .

### 3 Action d'un champ magnétique sur un moment magnétique

L'action d'un champ magnétique sur un aimant, ou sur une spire de courant est d'aligner le moment magnétique selon la direction du champ magnétique extérieur, parallèlement à celui-ci pour un équilibre stable et anti-parallèlement pour un équilibre instable.



On peut alors, en soumettant un aimant à un champ tournant (créé par deux bobines d'axes différents soumises à des courants sinusoïdaux synchrones correctement déphasés), le mettre en rotation, ce qui est le principe des *moteurs synchrones*.

## Lois de l'induction

## I Flux magnétique

### 1 Flux élémentaire

Soit  $d\vec{S}$  une surface élémentaire orientée. On note  $d\Phi$  le flux élémentaire du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers  $d\vec{S}$ ,

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$d\Phi$  est maximal lorsque  $\vec{B}$  et  $d\vec{S}$  sont colinéaires, c'est à dire quand  $\vec{B}$  est perpendiculaire à l'élément de surface  $dS$ .

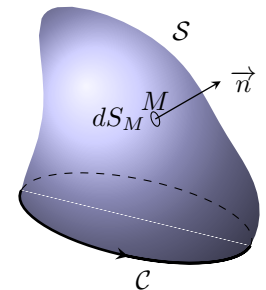
$d\Phi$  est une grandeur algébrique scalaire qui s'exprime en webers (W).  
 $1 \text{ W} = 1 \text{ T.m}^2 = 1 \text{ kg. A}^{-1}.\text{m}^2.\text{s}^{-2}$ .

### 2 Flux à travers une surface plane

$\mathcal{C}$  est un contour fermé et  $\mathcal{S}$  une surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$

$\Phi_{\mathcal{S}}$  = flux du champ magnétique au travers  $\mathcal{S}$  :

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

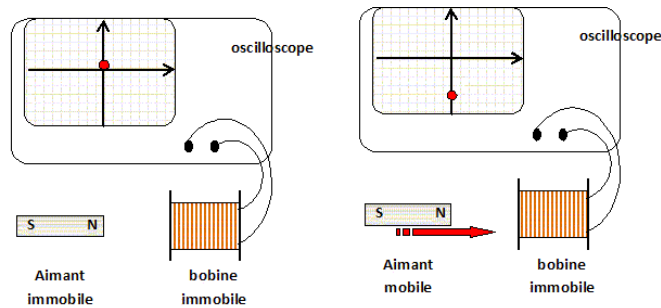


Pour un champ  $\vec{B}$  **uniforme**, on retient  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ .

En particulier, si la surface choisie n'intercepte aucune ligne de champ, le flux magnétique est nul.

## II Loi de Lenz

### 1 Observations expérimentales



### 2 Loi

Cette loi phénoménologique permet de prévoir le sens du courant induit dans des expériences avec un circuit fixe, ou le sens du déplacement dans des expériences avec un circuit mobile :

Les phénomènes d'induction s'opposent, par leurs effets, aux causes qui leur ont donné naissance.

## III Loi de Faraday

Lorsque le flux du champ magnétique à travers un circuit varie au cours du temps, le circuit est la siège d'un phénomène d'induction et le courant induit est le même que celui que produirait un générateur de f.e.m.  $e$  telle que :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$\Phi$  est le flux du champ  $\vec{B}$  à travers le circuit en **orientant le circuit dans le sens de  $i$** .

Conditions d'application :

- Pour un **circuit fixe** dans un champ variable, pas de restriction :  $e = - \frac{d\Phi}{dt}$ .
- Pour un **circuit mobile** dans un champ fixe, il faut ajouter deux conditions :
  - ☞ on doit pouvoir définir  $\varphi(t)$  à tout instant à travers le circuit,
  - ☞ le circuit doit couper des lignes de champ au cours de son déplacement.

Circuit fixe dans  $\vec{B}$  variable

## I Autoinduction

### 1 Inductance propre

Un circuit parcouru par un courant  $i$  génère un champ magnétique proportionnel à  $i$ , et ce champ a un **flux propre** à travers le circuit, lui aussi proportionnel à  $i$ . Ce flux propre s'écrit  $\Phi_P = Li$ , où  $L$  est le coefficient d'auto-inductance propre du circuit. On l'appelle aussi **inductance propre**.

Dimension :  $[L] = ML^2T^{-2}I^{-2}$

Unité : le henry ;  $1 \text{ H} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ .

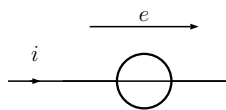
Remarquons que  $L > 0$ , et ce à cause des conventions cohérentes d'orientation. Ce coefficient dépend uniquement de la géométrie du circuit.

### 2 Circuit électrique équivalent

Si le circuit est soumis à un courant  $i(t)$  variable, il en résulte une variation du flux propre, et donc une f.é.m. induite d'après la loi de Faraday :

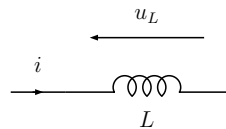
$$e(t) = -\frac{d\Phi_P}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Convention générateur



$$e = -\frac{d\Phi_P}{dt}$$

Convention récepteur



$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

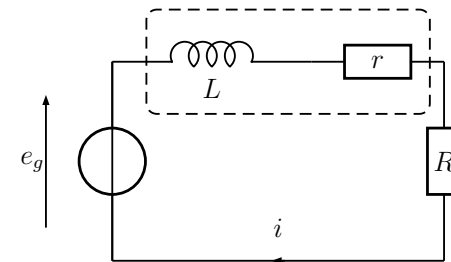
## 3 Mesure de $L$

On peut citer plusieurs méthodes de mesure de l'inductance propre d'une bobine.

- ① On peut former un circuit  $RL$  que l'on soumet à une tension créneau, et on étudie ainsi la réponse à un échelon, et notamment le temps de réponse  $\tau = \frac{L}{R}$  (en négligeant la résistance interne  $r$  de la bobine). On mesure  $\tau$  par l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote.
- ② Avec le même circuit, on mesure  $\tau$  avec le temps de montée à 63%, ou à 95% pour  $3\tau$ .
- ③ On peut aussi former un circuit  $RLC$ , alimenté par une tension sinusoïdale, et étudier la fréquence ou la pulsation de résonance  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
- ④ On peut aussi équilibrer un pont formé d'une bobine, de deux résistances connues et d'une association  $R//C$  aux valeurs ajustables.

## 4 Aspect énergétique

On considère le montage suivant :



En négligeant la résistance interne  $r$  de la bobine, la loi des mailles donne :

$$e_g = L\frac{di}{dt} + Ri.$$

En multipliant cette équation par  $i(t)$ , on obtient le bilan de puissance :

$$e_g i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2.$$

On reconnaît la puissance fournie par le générateur  $\mathcal{P}_g = e_g i$ , la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance  $\mathcal{P}_J = Ri^2$  et le dernier terme correspond à la puissance magnétique

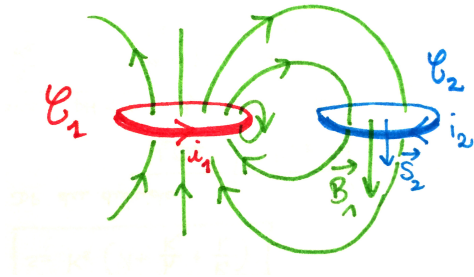
$$\mathcal{P}_m = \frac{d}{dt}(E_{mag}), \text{ avec } E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2.$$

Cette énergie magnétique  $E_{mag}$  est stockée dans le circuit d'autoinductance  $L$ .

## II Inductance mutuelle

### 1 Couplage inductif

On s'intéresse maintenant au cas de deux circuits filiformes, comme représenté sur la figure suivante :



Dans cette configuration, le circuit  $\mathcal{C}_2$  intercepte des lignes du champ  $\vec{B}_1$  créé par le circuit  $\mathcal{C}_1$ , et proportionnel au courant  $i_1$ . Le circuit  $\mathcal{C}_1$  envoie donc un flux  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \alpha_1 i_1$  à travers le circuit  $\mathcal{C}_2$ . Réciproquement, le circuit  $\mathcal{C}_2$  envoie un flux  $\Phi_{2 \rightarrow 1} = \alpha_2 i_2$  à travers le circuit  $\mathcal{C}_1$ .

Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont liés à la géométrie de l'ensemble des deux circuits, et d'après le théorème de Neumann (admis), ils sont identiques : il s'agit du **coefficient d'induction mutuelle**  $M$ .

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \text{ et } \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

Les deux circuits sont dits couplés.  $M$  est algébrique, il dépend de l'orientation relative des deux circuits.

### 2 Circuits équivalents

Le flux magnétique à travers le circuit  $\mathcal{C}_1$  est dû

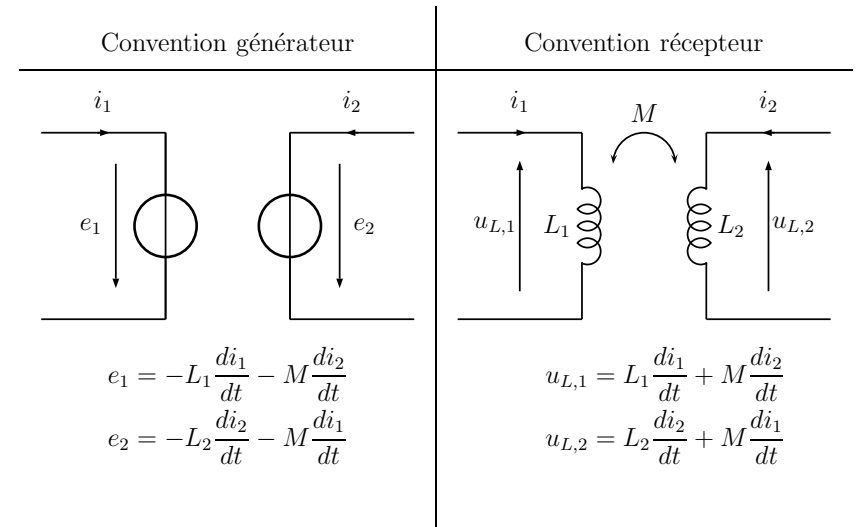
- au flux propre  $\Phi_{P1} = L_1 i_1$
- au flux envoyé par le circuit  $\mathcal{C}_2$  :  $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$

La f.é.m. induite résultante est composée de ces deux contributions :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{P1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}) = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2)$$

De la même façon, la f.é.m. induite dans le circuit  $\mathcal{C}_2$  est donnée par :

$$e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{P2} + \Phi_{1 \rightarrow 2}) = -\frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M i_1)$$



### 3 Aspect énergétique

En additionnant les bilans de puissance obtenus en multipliant l'équation de maille du circuit  $\mathcal{C}_1$  par  $i_1$  et l'équation de maille du circuit  $\mathcal{C}_2$  par  $i_2$ , on fait apparaître une puissance magnétique globale ainsi qu'une énergie magnétique emmagasinée dans le système :

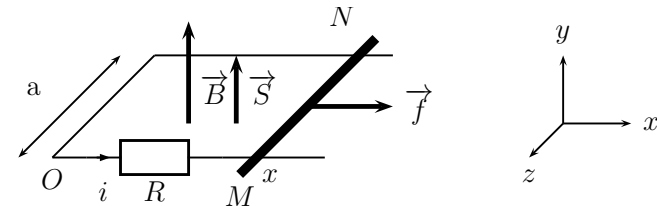
$$\mathcal{P}_{mag} = \frac{dE_{mag}}{dt}, \text{ avec } E_{mag} = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2$$

Application : Ce couplage par inductance mutuelle est notamment mis à profit dans les **transformateurs**, pour abaisser ou amplifier une tension alternative, ou pour isoler une portion de circuit.

Circuit mobile dans  $\vec{B}$  stationnaire

## I Rails de Laplace générateurs

### 1 Position du problème : conversion "méca → élec"



Une tige mobile  $T$ , conductrice, de masse  $m$ , posée sur des rails conducteurs est mise en mouvement par une force constante  $\vec{f} = f\vec{e}_x$ , dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_y$ .

D'après l'orientation choisie pour  $i$ , le vecteur surface  $\vec{S}$  est dans le sens de  $\vec{B}$ .

Système : Tige  $T$  de masse  $m$

Référentiel : terrestre galiléen

Cinématique :  $\vec{v}_T = v(t)\vec{e}_x = \dot{x}\vec{e}_x$

Bilan des forces :

- poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$
- réaction des rails  $\vec{R}_N = R_N\vec{e}_y$  (pas de frottement)
- force constante  $\vec{f} = f\vec{e}_x$
- force de Laplace "induite"

Analyse : Comme la tige se déplace, le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit varie, ce qui provoque l'apparition d'une f.é.m. induite et d'un courant induit dans le circuit. La tige, parcourue par le courant induit, dans un champ magnétique, ressent alors une force de Laplace induite, qui, par ses effets, s'oppose au mouvement initial de la tige (loi de Lenz).



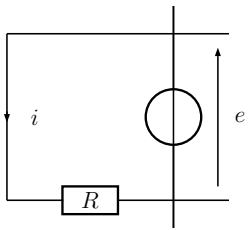
## 2 f.é.m. induite ; équation électrique

Le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit est  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bax(t)$ .

Le circuit coupant des lignes de champ lors de son déplacement, on peut appliquer la loi de Faraday pour calculer la f.é.m. induite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -aB\frac{dx}{dt} = -aBv(t)$$

Le circuit électrique équivalent a l'allure suivante :



La loi des mailles fournit l'équation électrique :

$$e(t) = Ri(t) = -aBv(t)$$

On note que  $i(t) = -\frac{aBv(t)}{R} < 0$

## 3 Force de Laplace ; équation mécanique

La force de Laplace induite est  $\vec{F}_L = i\vec{MN} \wedge \vec{B} = i(t)aB\vec{e}_x$ .

Remarquons qu'avec  $i < 0$ , la force de Laplace s'oppose bien au mouvement initial de la tige.

Le principe fondamental de la dynamique, projeté sur  $\vec{e}_x$ , donne l'équation mécanique

$$m\frac{dv(t)}{dt} = f + aBi(t)$$

## 4 Loi de vitesse

Les équations électrique (EE) et mécanique (EM) sont couplées :

$$\begin{cases} \text{(EE)} : e(t) = Ri(t) = -aBv(t) \\ \text{(EM)} : m\frac{dv}{dt} = f + aBi(t) \end{cases}$$

On les découple en éliminant, par exemple, l'intensité  $i$ , ce qui donne

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{a^2B^2}{R}v = f.$$

La force de Laplace agit comme une force de frottement fluide linéaire. On peut mettre cette équation différentielle sous forme canonique :

$$\tau\frac{dv}{dt} + v = v_{lim}, \text{ avec } \tau = \frac{mR}{a^2B^2}, \text{ et } v_{lim} = \frac{Rf}{a^2B^2}.$$

Pour une tige initialement au repos ( $v(0) = 0$ ), on obtient  $v(t) = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$

et  $i(t) = -\frac{f}{aB}(1 - e^{-t/\tau})$ .

## 5 Bilans de puissance

Puissance électrique  $(EE) \times i \quad ei = Ri^2$

Puissance mécanique  $(EM) \times v \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = fv + F_Lv$

On a donc :

$$\begin{cases} Ri^2 = -iaBv \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = fv + iaBv \end{cases}$$

Finalement,  $fv = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2$ . La puissance mécanique fournie à la tige par

la force motrice  $f$  est utilisée pour modifier la vitesse de la tige, le reste étant dissipé par effet Joule dans la résistance du circuit électrique.

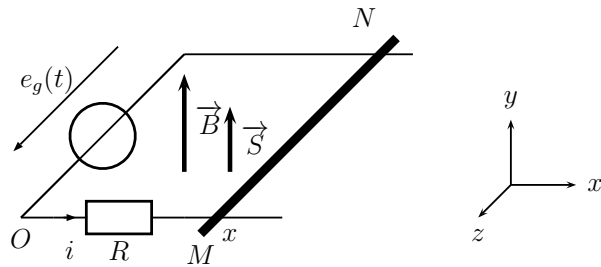
Le terme  $iaBv$  est le terme de couplage électro-mécanique, il correspond à la puissance  $\mathcal{P}_{fem}$  fournie par la force électro-motrice induite, ou encore à la puissance résistante  $\mathcal{P}_L$  de la force de Laplace induite.

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire :  $\mathcal{P}_{fem} + \mathcal{P}_L = 0$ .

C'est ce qui permet la conversion, dans le cas présent, d'énergie mécanique en énergie électrique.

## II Rails de Laplace moteurs

### 1 Position du problème : conversion "élec → méca"



La tige mobile  $T$ , conductrice, de masse  $m$ , est posée sur des rails conducteurs qui comprennent désormais un générateur de f.é.m. variable  $e_g(t)$ , l'ensemble étant plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_y$ .

D'après l'orientation choisie pour  $i$ , le vecteur surface  $\vec{S}$  est dans le sens de  $\vec{B}$ .

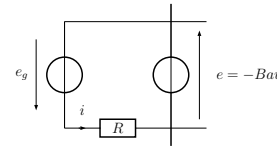
#### Analyse :

- Le générateur placé dans le circuit impose un échelon de tension, ce qui provoque le passage d'un courant :  $e(t) = \begin{cases} e_g(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ e_g(t) = E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$
- La tige  $T$ , parcourue par un courant  $i$  ressent alors une force de Laplace  $\vec{F}_L = i\vec{MN} \wedge \vec{B}$ , qui la met en mouvement selon  $(Ox)$ .
- Ce déplacement de la tige provoque une variation du flux magnétique  $\Phi$  à travers le circuit, et donc il apparaît une f.é.m. induite  $e$ , qui s'opposera, par ses effets, à la variation de  $e_g$  (loi de Lenz).

### 2 f.é.m. induite ; équation électrique

Le flux magnétique à travers le circuit s'écrit  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bax(t)$ . La f.é.m. induite est donc donnée par la loi de Faraday (car le circuit coupe des lignes de champ lors de son mouvement) :  $e(t) = -\frac{d\varphi}{dt} = -aBv(t)$ .

Le circuit électrique équivalent a l'allure suivante :



La loi des mailles fournit l'équation électrique :  $e(t) + E = Ri(t)$  soit

$$i(t) = \frac{E - Bav(t)}{R}$$

On note que  $e < 0$ , ce qui est conforme à la loi de Lenz.

### 3 Force de Laplace ; équation mécanique

La force de Laplace est  $\vec{F}_L = i\vec{MN} \wedge \vec{B} = iaB\vec{e}_x$ .

La projection sur  $\vec{e}_x$  du principe fondamental de la dynamique donne l'équation mécanique :

$$m\frac{dv}{dt} = i(t)aB$$

### 4 Loi de vitesse

Après élimination de  $i$  entre ces deux équations couplées, on obtient

$$\tau\frac{dv}{dt} + v = v_{lim}, \text{ avec } \tau = \frac{mR}{a^2B^2}, \text{ et } v_{lim} = \frac{E}{aB}.$$

Si la tige est initialement au repos ( $v(0) = 0$ ), il vient  $v(t) = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$  et

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}.$$

## 5 Bilans

$$(EE) \times i \quad ei + Ei = Ri^2 \quad Ei - Bavi = Ri^2$$

$$(EM) \times v \quad m \frac{dv}{dt} = F_L v \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = iaBv$$

Le bilan de puissance donne  $Ei = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) + Ri^2$ .

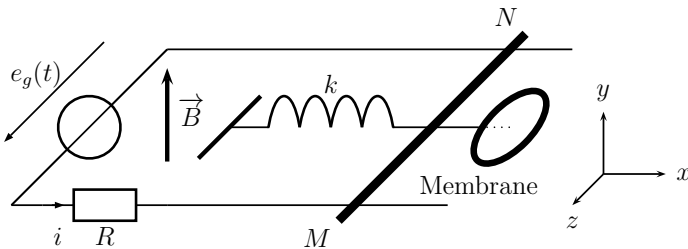
La puissance électrique  $Ei$  fournie par le générateur est utilisée pour modifier l'énergie cinétique de la tige (mise en mouvement). Le reste est dissipé par effet Joule dans la résistance du circuit.

L'intégration entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$  (en pratique, quelques  $\tau$ ) montre que seulement 50% de l'énergie électrique fournie par le générateur est convertie en énergie cinétique.

## III Haut-parleur électrodynamique

### 1 Dispositif schématique

Un haut-parleur convertit un signal électrique en signal sonore (il convertit donc de l'énergie électrique en énergie mécanique). On peut en donner un principe très simplifié avec des rails de Laplace selon le schéma suivant :



Un générateur fournit le signal électrique  $e_g(t)$  à convertir. La tige est reliée à une membrane qui convertira le déplacement mécanique en onde sonore. Elle est également reliée au bâti fixe par un ressort de raideur  $k$ . Le déplacement de la tige est repéré par rapport à sa position d'équilibre. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique

$\vec{B}$  uniforme et stationnaire.

**Analyse :** Le générateur impose la tension variable  $e_g(t)$ , la tige  $T$ , parcourue par un courant  $i(t)$  est soumise à une force de Laplace  $\vec{F}_L$  excitatrice qui va la mettre en mouvement vibratoire (ressort). Cette vibration, transmise à la membrane, va permettre l'émission d'une onde sonore, image du signal électrique. La tige  $T$  étant mobile, le flux coupé par le circuit est variable, ce qui crée une f.é.m. induite  $e(t)$  dans le circuit, s'opposant à  $e_g(t)$  par ses effets (loi de Lenz).

### 2 Équations électrique et mécanique

La f.é.m. induite est donnée par  $e = -aB\dot{x}(t)$ , ce qui, par la loi des mailles  $e_g + e = Ri$ , donne l'équation électrique suivante :

$$(EE) : e_g = Ri + aB\dot{x}$$

La tige est soumise (en plus de son poids et de la réaction des rails, frottements négligés) à

- la force de Laplace induite :  $\vec{F}_L = iaB\vec{e}_x$
- la force de rappel élastique du ressort :  $\vec{f}_k = -kx\vec{e}_x$
- une force de frottement fluide qui modélise la perte associée à l'émission de l'onde sonore :  $\vec{f}_s = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$

En projection sur l'axe  $(Ox)$ , le PFD donne alors l'équation mécanique suivante :

$$m\ddot{x} = i(t)aB - kx - \alpha\dot{x}$$

### 3 Bilan de puissance

$$(EE) \times i \quad e_g i = Ri^2 + iaB\dot{x}$$

$$(EM) \times v \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = iaB\dot{x} - kx\dot{x} - \alpha\dot{x}^2$$

Le bilan donne

$$e_g i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) + \alpha \dot{x}^2$$

La puissance fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule (premier terme), en partie utilisée pour la mise en mouvement de la tige (modification de l'énergie mécanique  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$ , et enfin en partie convertie en puissance associée à l'onde sonore.

#### 4 Comportement en régime sinusoïdal établi

En régime sinusoïdal établi, en utilisant les grandeurs complexes, les équations électrique et mécanique précédentes deviennent :

$$(EE) \quad \underline{e}_g = R \underline{i} + a B \underline{v}$$

$$(EM) \quad j m \omega \underline{v} = \underline{i} a B - k \frac{\underline{v}}{j \omega} - \alpha \underline{v}$$

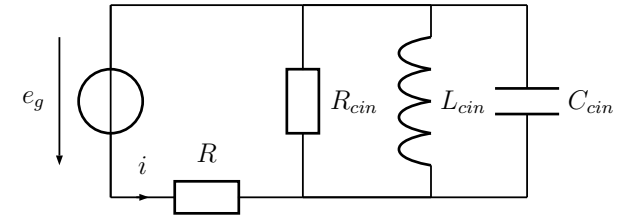
En exprimant  $\underline{v}$  grâce à l'équation mécanique, puis en réinjectant cette expression dans l'équation électrique, on obtient

$$\underline{e}_g = \left( R + \frac{a^2 B^2}{\alpha + j m \omega + \frac{k}{j \omega}} \right) \underline{i} = (R + \underline{Z}_{cin}) \underline{i}$$

Il apparaît une **impédance cinétique** qui caractérise le couplage électro-mécanique. Elle est constituée de 3 dipôles équivalents, en parallèle (les admittances s'ajoutent) :

$$\underline{Y}_{cin} = \frac{1}{\underline{Z}_{cin}} = \frac{1}{R_{cin}} + j C_{cin} \omega + \frac{1}{j L_{cin} \omega} = \frac{\alpha}{a^2 B^2} + j \frac{m}{a^2 B^2} \omega + \frac{1}{j \omega} \frac{k}{a^2 B^2}$$

Le circuit équivalent est donc le suivant :



#### 5 Freinage par induction

L'étude des rails de Laplace générateurs montre que l'action de la force de Laplace induite par une déformation d'un circuit filiforme dans un champ magnétique est une action de freinage. Ceci peut se généraliser à tout dispositif de conversion de puissance mécanique en puissance électrique.

On peut le mettre à profit dans des dispositifs de **freinage par induction** (TGV, poids lourds). Remarquons que ce freinage étant proportionnel à la vitesse, il est peu efficace en fin de freinage et d'autres dispositifs doivent alors prendre le relais. Deuxièmement, l'effet Joule associé au courant induit provoque un échauffement des parties mécaniques qu'il convient de maîtriser.

Dans une pièce métallique ne présentant pas nécessairement une géométrie filiforme, les courants induits qui apparaissent dans l'ensemble du volume du conducteur sont alors appelés les **courants de Foucault**.