Dynamique en référentiel non galiléen

Question de cours

- Comment définit-on un référentiel ?
- Quels sont les deux grands types de mouvement d'un référentiel par rapport à un autre ?
- Rappeler la formule qui exprime la dérivée d'un vecteur dans un référentiel $\mathscr{R}$ en fonction de la dérivée de ce vecteur dans un autre référentiel $\mathscr{R}'$.
- Qu'appelle-t-on point coïncident ?
- Donner, puis établir, la loi de composition des vitesses.
- Qu'appelle-t-on vitesse d'entraînement ?
- Donner son expression dans les deux cas élémentaires du programme.
- Donner la loi de composition des accélérations.
- Définir l'accélération d'entraînement. Donner son expressions dans les deux cas élémentaires du programme.
- Donner l'expression de l'accélération de Coriolis.
- Dans le cas d'un référentiel $\mathscr{R}'$ en rotation uniforme par rapport au référentiel $\mathscr{R}$, quelle est l'expression de l'accélération d'entraînement du point M lorsque celui-ci se trouve à une distance r de l'axe de rotation ?
- Quel est le mouvement relatif de deux référentiels galiléens ?
- Donner les expressions de la force d'inertie d'entrainement et de a force d'inertie de Coriolis pour les deux types de référentiels mobiles.
- Énoncer les théorèmes fondamentaux de dynamique en référentiel non galiléen : théorème de la quantité de mouvelent, théorème du moment cinétique, théorème de l'énergie/puissance cinétique/mécanique.
- Champ de pesanteur : définition, évolution qualitative avec la latitude, ordres de grandeur.

Applications directes du cours

$\boxed{1}$ Un batelier est sur une rive et doit traverser une rivière avec une barque motorisée. Le moteur est capable, à chaque instant, de propulser la barque à une vitesse de $v_B = 8$ km/h par rapport à l'eau. Le courant de la rivière a une vitesse de $v_0 = 5$ km/h.
a) Si le batelier met le cap sur la rive d'en face, où arrive-t-il ?
b) Comment le batelier fait-il pour traverser la rivière perpendiculairement aux rives ?

$\boxed{2}$ Le passager d'une voiture observe que la pluie tombe en formant un angle de $\theta = 40^o$ par rapport à la verticale lorsqu'il roule à 50 km.h^{-1}. Lorsque la voiture s'arrête au feu, le passager constate que la pluie tombe verticalement. Calculer la vitesse de la pluie par rapport au sol puis par rapport à la voiture quand elle roule à 50 km.h^{-1}.

$\boxed{3}$ Un pendule simple est constitué par une masse ponctuelle m suspendue à un fil de longueur l ; l'autre extrémité de ce fil est fixée en un point O au plafond d'un train. Ce train est animé d'un mouvement de translation rectiligne, parallèle à la direction horizontale (Ox) d'un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, et d'accélération $\vec{\gamma}$ constante par rapport à $\mathscr{R}$.

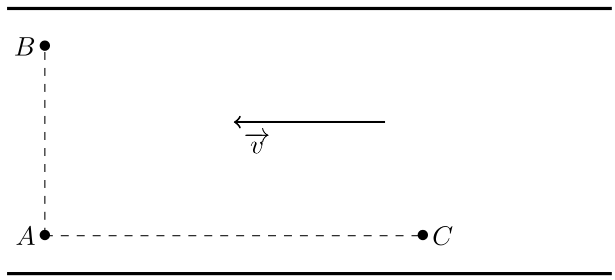
1. Déterminer l'angle α que fait le fil du pendule avec la direction (Oy), verticale du référentiel $\mathscr{R}$, lorsque le pendule est en équilibre pour un observateur placé dans le train.
2. Cet observateur étudie les oscillations du pendule autour de cette position d'équilibre, dans le plan (xOy). La position du pendule est repérée par l'angle θ du fil et de (Oy). Calculer le moment cinétique du pendule par rapport à O ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans un référentiel lié au train. En déduire la période des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre.

$\boxed{1}$ a) $HA = d\dfrac{v_0}{v}$ b) $\sin\alpha = \dfrac{v_0}{v_1}$. $\boxed{2}$ $v_p = v_0/\tan\theta$, 29 km.h^{-1}

Exercices

1. Un nageur

Un nageur parti du point A se déplace à la vitesse constante $\overrightarrow{V}$ par rapport à l'eau d'une rivière dont les eaux sont animées d'un courant de vitesse $\overrightarrow{v}$ avec $\|\overrightarrow{v}\| < \|\overrightarrow{V}\|$. Le nageur effectue les trajets aller-retour ABA en un temps t_1 et ACA en un temps t_2. On donne $AB = d$ et $AC = 2d$.



1. Exprimer le rapport t_2/t_1 en fonction du rapport v/V.
2. Sachant que $t_2 = 4t_1 = 16$ mn, déterminer la direction de la vitesse $\overrightarrow{V}$ du nageur qui se déplace à contre courant pour atteindre C et le temps t_0 qu'il aurait mis pour parcourir l'aller-retour dans un lac calme.

2. Tour de manège

Premier tour

Un homme se déplace sur un manège en rotation uniforme à la vitesse angulaire constante $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$ par rapport au référentiel terrestre. Il suit un cercle de rayon r_0 concentrique au manège, avec une vitesse constante v_0 par rapport au manège.

1. Quelle est sa vitesse dans le référentiel terrestre ? À quelle condition est-il immobile dans ce réferentiel ?

   On se placera dans cette hypothèse dans la suite.
2. Déterminer son accélération dans le référentiel terrestre par la loi de composition. On représentera les trois composantes de l'accélération. Retrouver l'expression de cette accélération en raisonnant directement dans le référentiel terrestre.

Deuxième tour

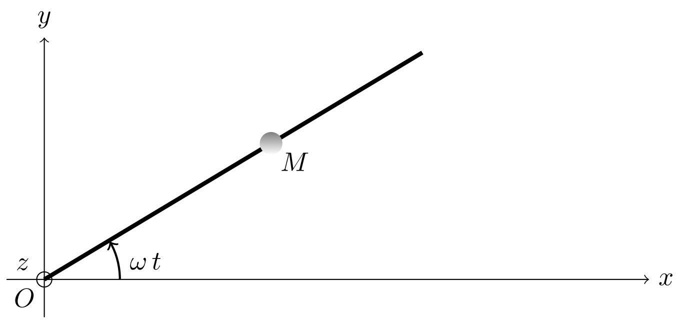
L'homme se déplace maintenant radialement à la vitesse constante v_0. À $t = 0$, il est au centre du manège.

3. Déterminer par la loi de composition, sa vitesse dans le référentiel terrestre en fonction de v_0, ω et t.
4. Déterminer son accélération dans le référentiel terrestre. Cette accélération peut-elle s'annuler ?

3. Anneau sur une tige en rotation

Un référentiel $(\mathcal{R}_1)$ est muni du repère $(Oxyz)$. Une tige (T) est en rotation dans le plan (Oxy) autour de l'axe Oz avec la vitesse angulaire ω constante. Cette tige constitue un référentiel $(\mathcal{R}_2)$. Un anneau M est enfilé sur la tige et se déplace selon une loi horaire :

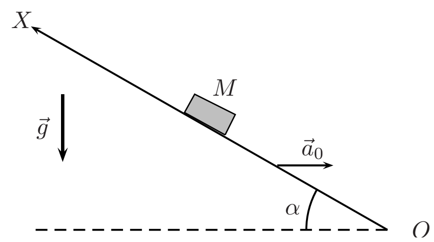
$$OM(t) = x'(t) = \frac{k}{2}t^2 \quad (k \text{ constante})$$



1. Déterminer $\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}_2)$, $\overrightarrow{v_{\text{ent}}}$, $\overrightarrow{a_{\text{ent}}}$ et $\overrightarrow{a_{\text{Cor}}}$.
2. En déduire $\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}_1)$ et $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}_1)$.
3. Retrouver ces résultats par un calcul direct.

4. Caisse sur plan incliné

Un point matériel M, de masse m, peut glisser sans frottement sur un support plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Ce plan est en mouvement de translation uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a}_0$ horizontale par rapport À un référentiel galiléen. On étudie le mouvement du point M suivant la ligne de plus grande pente (OX).



1. Établir l'expression de l'accélération $\ddot{X}$ du point M relativement au plan incliné.
2. À la date t=0, le point est abandonné sans vitesse initiale par rapport au plan. À quelle condition sur l'angle α le point remonte-t-il la pente ?

5. Caisse dans un camion accéléré

Une caisse assimilée à un point matériel M de masse m est posée sur la plateforme horizontale d'un camion qui a un mouvement rectiligne uniformément accéléré par rapport au sol, considéré comme un référentiel galiléen. Son accélération est $\vec{\gamma}_0 = \gamma_0 \vec{e}_x$. Le système est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. L'action de contact de la plateforme sur la caisse est notée $\vec{R} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_z$ et satisfait aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement f. On note $\mathscr{R}_\mathscr{T}$ le référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathscr{R}_\mathscr{C}$ le référentiel lié au camion.

1. À quelle condition sur γ_0, f et g la caisse ne glisse-telle pas ? En déduire alors les expressions de N et de T.
2. On suppose que la caisse glisse à partir de l'instant $t = 0$.
   (a) Établir l'expression de la vitesse relative de la caisse.
   (b) Établir, dans le référentiel terrestre la puissance des actions de contact du camion sur la caisse $P_{\text{camion}\rightarrow\text{caisse}}$. Commenter son signe.
   (c) Établir, dans le référentiel du camion la puissance des actions de contact du camion sur la caisse $P'_{\text{camion}\rightarrow\text{caisse}}$. Commenter son signe.
   (d) Former la somme des eux. Conclure.

6. Force de Coriolis sur un train

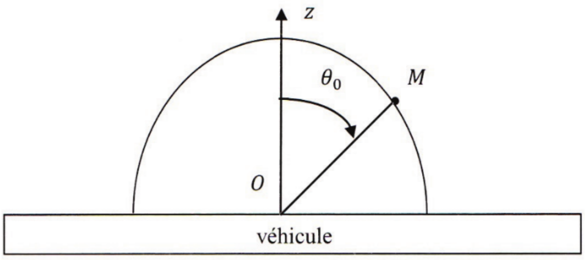
Un train à grande vitesse, de masse $m = 7,8.10^5$ kg, circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante $v = 300$ km.h^{-1} ; à l'instant considéré, il se trouve à la hauteur de Valence, à la latitude $\lambda = 45^o$ nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_x$ vers l'est, $\vec{e}_y$ vers le nord et $\vec{e}_z$ vers le zénith.

1. Faire un schéma où apparaissent la Terre (en coupe), la base ci-dessus au point P, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\overrightarrow{\Omega}$.

2. Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre et comparer sa norme à celle du poids du train. On donne $\Omega = 7,3.10^{-5}$ rad.s^{-1} ; $g = 9,8$ m.s^{-2}.
3. Faire un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change quand le train va vers le nord ?

7. Bille sur véhicule en translation

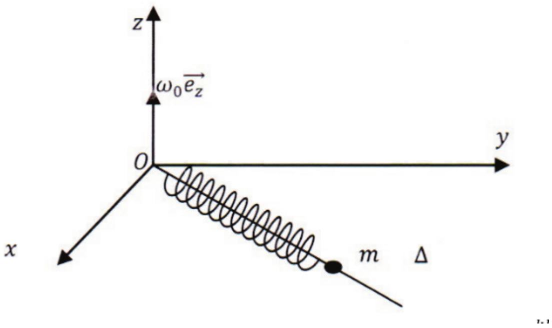
On pose un objet ponctuel M, sans vitesse initiale, sur un support circulaire lié à un véhicule en translation avec une accélération $\vec{\gamma}_0 = \gamma_0 \vec{u}_x$. Le mobile est repéré initialement par l'angle θ_0. On se place dans le champ de pesanteur uniforme, on suppose le référentiel terrestre galiléen, et qu'il y a absence de frottements.



1. Montrer qu'il existe un angle $\theta_0 = \theta_E$ où M est en équilibre relatif.
2. Retrouver la valeur de θ_E par un raisonnement énergétique.
3. Discuter de la stabilité de la position d'équilibre.

8. Ressort tournant

Un anneau glisse sans frottement sur un axe Δ tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire $\omega_0 \vec{e}_z$. Il est relié au point O par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.



1. Quelles sont les forces exercées sur la masse m ?
2. Discuter du mouvement de l'anneau dans le référentiel tournant en fonction du signe de $\dfrac{k}{m} - \omega_0^2$.
3. Existe-t-il une position d'équilibre stable ?

9. Déviation vers l'est

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel à l'altitude h dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude λ à la surface de la Terre.

1. En négligeant l'influence de la force de Coriolis sur le mouvement, établir les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ ainsi que le temps de chute. Faire l'application numérique pour $h = 150$ m et $g = 9,81$ ms^{-2}.
2. Vérifier le caractère correctif du terme de Coriolis. Exprimer de façon générale la force de Coriolis, et identifier le terme correctif principal donné par cette force.
3. Écrire, au premier ordre de correction, les équations du mouvement avec la force de Coriolis. Vérifier la « déviation vers l'Est »annoncée, et faire l'application numérique à la latitude de 50^o.

10. Pendule de Foucault

On s'intéresse au mouvement d'un pendule simple constitué d'une masse $m = 30$ kg suspendue à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur $\ell = 67$ m. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point A fixe par rapport au sol, situé à une hauteur égale à ℓ. À l'instant initial, on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = 5^o$ dans le plan méridien et on l'abandonne sans vitesse initiale. En un point P de latitude λ, on utilise la base de projection cartésienne $Pxyz$ en prenant Pz selon la direction verticale du lieu et Px dirigé vers l'est.

1. On suppose dans un premier temps que le référentiel terrestre est galiléen.
   (a) Montrer que le mouvement s'effectue dans un plan que l'on précisera.
   (b) Établir l'équation horaire du mouvement par exemple en donnant l'expression de l'angle θ entre le filin et la verticale.
   (c) Calculer les amplitudes maximales des positions, des vitesses et des accélérations dans les deux directions où s'effectuent le mouvement.
2. On tient compte désormais de la rotation de la Terre sur elle même.
   (a) Déterminer la valeur de la vitesse angulaire Ω associée.
   (b) En déduire que le fait de tenir compte de la rotation de la Terre est une correction par rapport au mouvement précédent.
   (c) Expliquer qualitativement pourquoi on peut considérer que le mouvement de ce pendule ne détecte pas la rotation de la Terre à l'équateur.
3. On cherche à écrire les équations du mouvement
   (a) Expliciter dans la base de projection proposée les équations du mouvement.
   (b) En faisant des approximations à justifier à l'aide des questions précédentes, montrer que les équations du mouvement précédent peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y}\sin\lambda + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x}\sin\lambda + \omega_0^2 y = 0 \\ T = mg \end{cases}$$

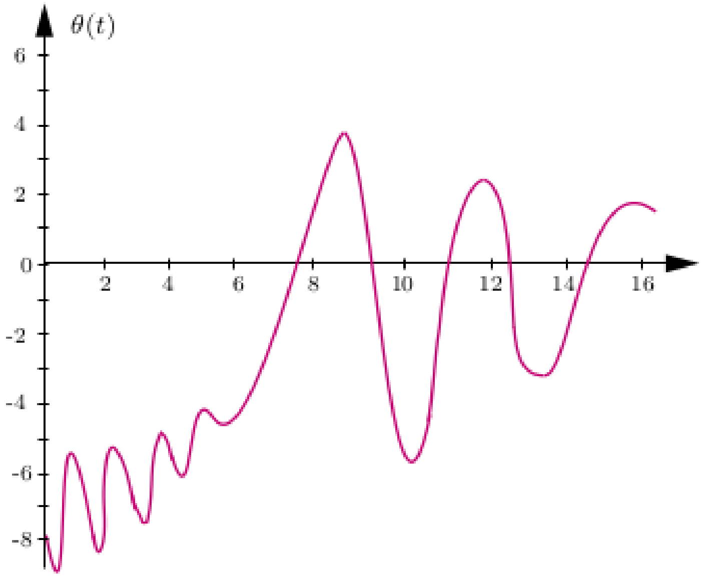
   (c) On résout ce système en utilisant la notation complexe : on pose $\underline{Z} = x + iy$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{Z}$.
   (d) La résoudre pour obtenir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.
   (e) Interpréter physiquement la solution.
4. Cette expérience fut réalisée sous la coupole du Panthéon en 1852 par Léon Foucault (1819-1868) qui mesura une période de 31h 46 minutes.
   (a) Déterminer la durée d'un tour complet du plan d'oscillations à la latitude $48^o51'$ (latitude de Paris). Que penser des résultats obtenus par Foucault ?
   (b) Comparer les périodes à l'équateur, au pôles et à la latitude de 45^o.
   (c) Ce résultat dépend-il de l'hémisphère dans lequel est réalisé l'expérience ?

Résolution de problème

1. Pendule dans camion

Un pendule de longueur ℓ et masse m est attaché au plafond d'un camion. Ce dermier démarre avec une accélération constante $\overrightarrow{a}$ jusqu'à la vitesse v_0 puis roule à vitesse constante.

À l'aide du grahique ci-dessous, déterminer $\|\overrightarrow{a}\|$, la vitesse v_0 du camion et la longuer ℓ du fil.


$\theta(t)$
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
2
4
6
8
10
12
14
16