



Devoir surveillé n°2

Samedi 12 octobre 2024

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES :

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.

Ne pas utiliser de correcteur.

Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Première partie

Séchage des sols

On se propose ici de déterminer le temps de séchage complet d'un sol saturé en eau (photo 1).



On travaille en coordonnées cartésiennes (x, y, z) de base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le sol (figure 1) est considéré comme infini dans les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y . Le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est ici considéré comme imperméable. Le sol s'étend depuis la côte $z = 0$ jusqu'à la côte H .



Figure1 - Modèle du sol

On note T la température, supposée uniforme, de l'air extérieur situé en $z > H$ et assimilable à un gaz parfait ; R désigne la constante des gaz parfait et N_A la constante d'Avogadro. La pression partielle de l'eau dans l'atmosphère est notée P_{ext} .

On admet que, sous l'action de l'air extérieur, le sol s'assèche par sa partie supérieure. On adopte un modèle dans lequel $z_m(t)$ délimite la partie mouillée du sol. On a $z_m(t=0) = H$. On note n_{liq} le nombre de molécules d'eau liquide par unité de volume de sol. n_{liq} est supposé constant dans la partie mouillée du sol.

À la date t , dans la zone $z < z_m(t)$, le sol est mouillé et contient de l'eau liquide. Dans la zone $z > z_m(t)$, le sol est sec mais contient de la vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait. On fait l'hypothèse que cette vapeur d'eau est également à la température uniforme T . Elle diffuse vers l'extérieur suivant la loi de Fick de coefficient de diffusion D .

À l'interface sol-atmosphère, en $z = H$, le vecteur densité de courant en molécules d'eau est de la forme : $\vec{j} = h(P(H) - P_{ext})\vec{e}_z$, où $P(H)$ est la pression partielle de l'eau en $z = H$.

À la date t , pour $z > z_m(t)$, on note $n_{vap}(z, t)$ la densité locale en molécules d'eau sous forme vapeur et $\Phi_S(z, t)$ le débit ascendant en molécules d'eau qui traversent une section horizontale S , orientée vers le haut et située à la côte z .

- Q1. Rappeler la définition de la pression de vapeur saturante. Écrire une condition faisant intervenir la pression partielle P_{ext} de l'eau dans l'atmosphère et la pression saturante de l'eau notée $P_{sat}(T)$ pour que le sol puisse effectivement sécher.
- Q2. Pourquoi un sol sèche-t-il plus vite lorsqu'il y a du vent ?
- Q3. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités, dans le Système International, des grandeurs qui interviennent.
- Q4. On suppose que dans le sol le phénomène de diffusion est en régime stationnaire. Justifier que le débit Φ_S est uniforme.
- Q5. Pour $z_m(t) < z < H$, déterminer l'expression de $n_{vap}(z)$ en fonction de $n_{vap}(z_m(t))$, Φ_S , D , S , z et $z_m(t)$.
- Q6. En considérant qu'en $z = z_m(t)$, la vapeur d'eau est en équilibre thermodynamique avec l'eau liquide, exprimer $n_{vap}(z_m(t))$ en fonction de N_A , $P_{sat}(T)$, R et T .
- Q7. En déduire l'expression de $n_{vap}(z)$ en fonction de N_A , $P_{sat}(T)$, R , T , Φ_S , D , S , z et $z_m(t)$.
- Q8. Exprimer alors $P(H)$ en fonction de $P_{sat}(T)$, N_A , R , T , Φ_S , D , S , H et $z_m(t)$.
- Q9. En utilisant la condition à l'interface sol-atmosphère, exprimer Φ_S en fonction de h , $P_{sat}(T)$, P_{ext} , S , R , T , H , $z_m(t)$, N_A et D .

- Q10. Écrire une équation différentielle de conservation des molécules d'eau à l'interface $z = z_m(t)$ reliant Φ_S , S , n_{liq} et $\frac{dz_m(t)}{dt}$.
- Q11. À l'aide des deux équations établies aux deux questions précédentes, en déduire l'équation différentielle vérifiée par $z_m(t)$, puis exprimer le temps de séchage $\tau_{\text{séchage}}$ en fonction de h , $P_{sat}(T)$, P_{ext} , n_{liq} , R , T , H , N_A et D .
- Q12. Le temps de séchage des sols dépend du phénomène de diffusion de la vapeur d'eau dans le sol et du phénomène d'évaporation à l'interface sol-atmosphère. On peut définir asymptotiquement deux zones, délimitées par une hauteur notée H_{lim} , dans lesquelles soit le phénomène de diffusion, soit le phénomène d'évaporation est déterminant. Préciser l'expression de H_{lim} en fonction de h , R , T , N_A et D .
- Q13. Les figures 2 et 3 représentent le temps de séchage en fonction de la hauteur H pour $T = 300$ K, $D = 5 \cdot 10^{-6}$ SI, $h = 8 \cdot 10^{17}$ molécules. $\text{m}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$, $P_{ext} = 600$ Pa, $P_{sat}(T) = 3,6$ kPa, et $n_{liq} = 3 \cdot 10^{28}$ molécules. m^{-3} .

Déterminer à l'aide de ces courbes (échelles différentes) la valeur numérique de H_{lim} et préciser le positionnement de chacune de ces zones.

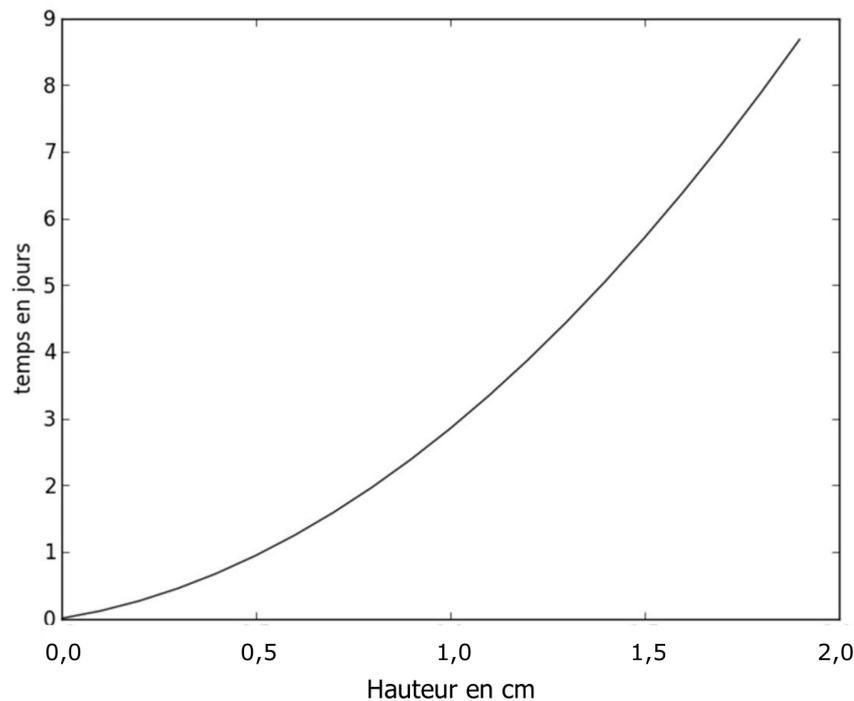


Figure 2 - Temps de séchage en fonction de la hauteur H

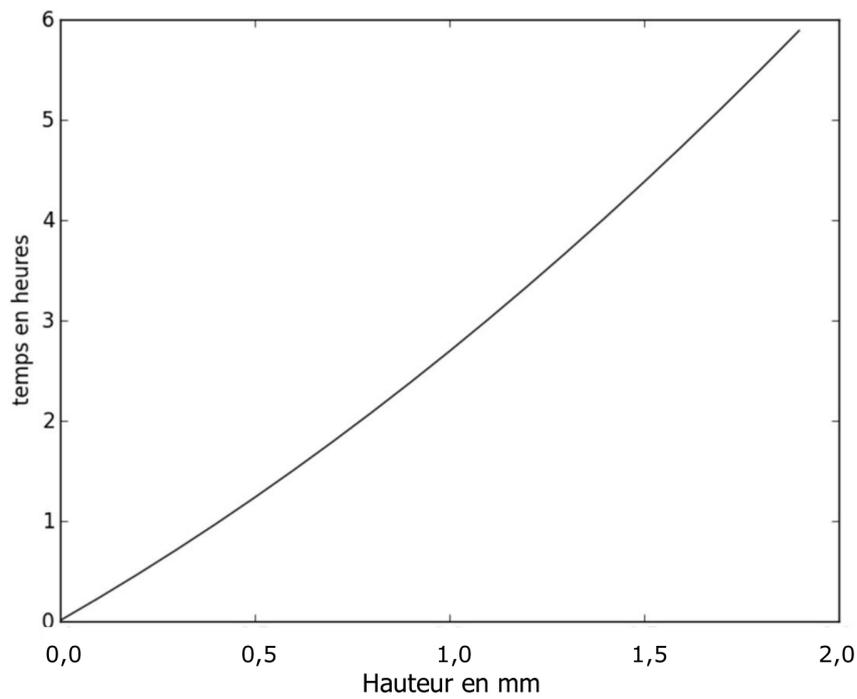


Figure 3 - Temps de séchage en fonction de la hauteur H

Données

Constantes physiques

$$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1},$$

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Théorèmes d'analyse vectorielle

Théorème de Green-Ostrogradski :

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée Σ limitant un domaine tridimensionnel \mathcal{D} peut s'exprimer par l'intégrale sur \mathcal{D} de la divergence de \vec{A} .

$$\iiint_{M \in \mathcal{D}} \text{div } \vec{A}(M) d\tau_M = \oiint_{M \in \Sigma} \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS_M.$$

Deuxième partie

Imagerie des nanoparticules d'or

Les nanoparticules sont trop petites pour être visualisées avec un microscope. Des techniques d'imagerie indirecte sont donc développées pour les détecter.

Une équipe de l'université Bordeaux 1 a mis au point il y a une quinzaine d'années une technique de microscopie photothermique qui permet de détecter et de localiser, dans un échantillon, des particules d'or dont le rayon n'excède pas quelques nanomètres. Une étape de ce protocole consiste à chauffer la particule par un faisceau laser et fait l'objet de cette partie.

On considère une sphère d'or, de rayon $a = 10$ nm, immobilisée dans un gel constitué très majoritairement d'eau, et chauffée par un faisceau laser.

Le milieu (le gel) entourant la sphère est considéré comme homogène, infini et initialement à la température T_0 . On note κ la conductivité thermique du milieu et C_g sa capacité thermique volumique. On supposera que, dans le domaine de températures exploré, ces grandeurs sont indépendantes de la température.

On note $P_{\text{abs}}(t)$ la puissance totale absorbée par la sphère et C_{Au} la capacité thermique volumique de l'or.

Compte tenu de la taille de la nanosphère, on admet que sa température est partout égale à sa température de surface, que l'on note $T_s(t)$.

On suppose que le contact thermique entre le gel et la nanoparticule est parfait donc que $T(a^+, t) = T_s(t)$.

I Équation de la diffusion thermique en géométrie sphérique

- Q1. Montrer, à l'aide d'un argument simple, que la température T en un point du milieu ne dépend spatialement que de r , distance séparant le centre de la nanosphère du point considéré.
- Q2. Effectuer un bilan énergétique entre t et $t + dt$ pour le système "coquille sphérique" comprise entre les sphères de rayon r et $r + dr$ et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(r, t)$ dans le milieu :

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) (r, t).$$

Cette équation se met sous la forme (le calcul n'est pas demandé) :

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}(r, t).$$

II Température dans le milieu en régime stationnaire

On se place en régime stationnaire, c'est-à-dire que les températures de la sphère et du milieu ne dépendent pas du temps.

- Q3. Établir l'expression de la température $T(r)$ dans le milieu en fonction de a , r , T_0 et T_s .
- Q4. En déduire l'expression de la puissance fournie par la nanosphère au milieu extérieur, $P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}}$, en fonction de a , κ et $\delta T_s = T_s - T_0$ sous la forme :

$$P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}} = 4\pi a \kappa \delta T_s.$$

III Température de surface de la nanosphère

On suppose maintenant que l'intensité du faisceau laser chauffant la nanosphère d'or est modulée sinusoïdalement, la puissance absorbée par la sphère étant donnée par :

$$P_{\text{abs}}(t) = P_0(1 + \cos(\Omega t)),$$

où P_0 est une constante positive. On admet que l'expression de $P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}}$ établie à la question 4 est valable même en régime variable.

- Q5. En effectuant un bilan énergétique pour la nanosphère entre t et $t + dt$, établir l'équation différentielle vérifiée par $\delta T_s(t)$ et la mettre sous la forme :

$$\delta T_s(t) + \tau \frac{d(\delta T_s)}{dt} = \frac{P_{\text{abs}}(t)}{4\pi\kappa a},$$

où τ est une constante dont on donnera l'expression en fonction des données du problème et dont on vérifiera qu'elle est bien homogène à un temps.

On donne $P_0 = 0,375 \mu\text{W}$ et $\frac{\Omega}{2\pi} = 700 \text{ kHz}$.

- Q6. Justifier que la température $T_s(t)$ se met sous la forme approchée :

$$T_s(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi\kappa a}(1 + \cos(\Omega t)).$$

- Q7. Donner l'expression de l'élévation moyenne $\overline{\delta T_s}$ de la température de la surface de la sphère et calculer sa valeur.

IV Température du gel autour de la sphère

On admet que la solution de l'équation de la diffusion thermique dans le gel s'écrit :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\alpha}{r} \left(1 + \exp\left(-\frac{r-a}{r_{th}}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{r_{th}}\right) \right),$$

où α est une constante réelle et $r_{th} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega C_g}}$.

- Q8. Question pour les 5/2 – Interpréter physiquement la constante r_{th} et citer un autre domaine de la physique où l'on rencontre une situation similaire.
- Q9. Établir l'expression de la constante α en fonction de P_0 et κ .
- Q10. En considérant que $\alpha \ll r_{th}$, déterminer l'expression de l'élévation moyenne $\overline{\delta T} = \langle T(r, t) - T_0 \rangle$ de la température du milieu contenu dans une sphère de rayon r_{th} autour de la nanoparticule, la moyenne étant effectuée sur le temps puis sur le volume de la sphère de rayon r_{th} . L'exprimer en fonction de a , r_{th} et de $\overline{\delta T_s}$ (voir question ?). Évaluer numériquement $\overline{\delta T}$.
- Q11. Proposer une technique permettant de révéler les variations faibles de l'indice optique du gel induites par cette variation de température.

Données :

Conductivité thermique du gel	$\kappa = 0,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Capacité thermique volumique	$C_g = 4,2 \times 10^6 \text{ J.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$
Capacité thermique volumique	$C_{\text{Au}} = 2,5 \times 10^6 \text{ J.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$
Volume d'une sphère de rayon R	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Surface d'une sphère de rayon R	$S = 4\pi R^2$

Troisième partie

Étude du circuit primaire d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au cœur du réacteur. La chaleur générée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute température par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du cœur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à $p = 155$ bar, puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur.

Le cœur du circuit primaire est constitué de $N = 41448$ crayons combustibles. Chaque crayon combustible est constitué d'un cylindre de hauteur $H = 3,66$ m et de diamètre $d = 2R_4 = 9,5$ mm. Ces crayons sont le siège de réactions de fission, exothermiques.

La puissance thermique développée dans le cœur vaut : $P_1 = 2776$ MW.

Le circuit primaire doit être correctement dimensionné pour prévenir tout échauffement anormal du combustible, $\text{UO}_2(\text{s})$, dont la température de fusion vaut 2800°C . La conductivité thermique de $\text{UO}_2(\text{s})$ vaut $\lambda_2 = 3,5$ $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

La pression de vapeur saturante de l'eau à 345°C vaut 155 bar.

Dans cette partie, on se place en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergie mécanique.

I Évolution de la température entre le cœur du combustible et le fluide caloporteur

On étudie l'évolution de la température entre le centre du combustible $\text{UO}_2(\text{s})$ et l'eau du circuit primaire, qui circule dans l'espace annulaire de rayon allant de R_4 à R_5 et entourant les crayons. On suppose que la température du fluide caloporteur est une constante et vaut $T_5 = 303^\circ\text{C}$.

On note T_2 et T_3 les températures de part et d'autre de l'interface entre le combustible et la gaine. On note T_4 et T_5 les températures de part et d'autre de l'interface entre la gaine et le fluide caloporteur.

Pour simplifier, on néglige les effets de bord à chaque extrémité des cylindres ; on considère pour l'étude que les N crayons combustibles de hauteur H sont disposés les uns au-dessus des autres et que les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale.

Les échanges thermiques au niveau d'une interface sont modélisés selon la relation de Newton : la puissance thermique traversant une surface dS de cette interface s'écrit $hdS(T_s - T_a)$ où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et T_s et T_a désignent les températures de part et d'autre de l'interface.

Le coefficient de transfert conducto-convectif entre le combustible et la gaine vaut $h_2 = 10$ $\text{kW}\cdot\text{m}^2\cdot\text{K}^{-1}$. Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la gaine et le fluide caloporteur vaut $h_4 = 25$ $\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^1$.

Chaque crayon est entouré d'une gaine d'épaisseur $e = R_4 - R_3 = 0,60$ mm dont la conductivité thermique vaut $\lambda_3 = 16$ $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

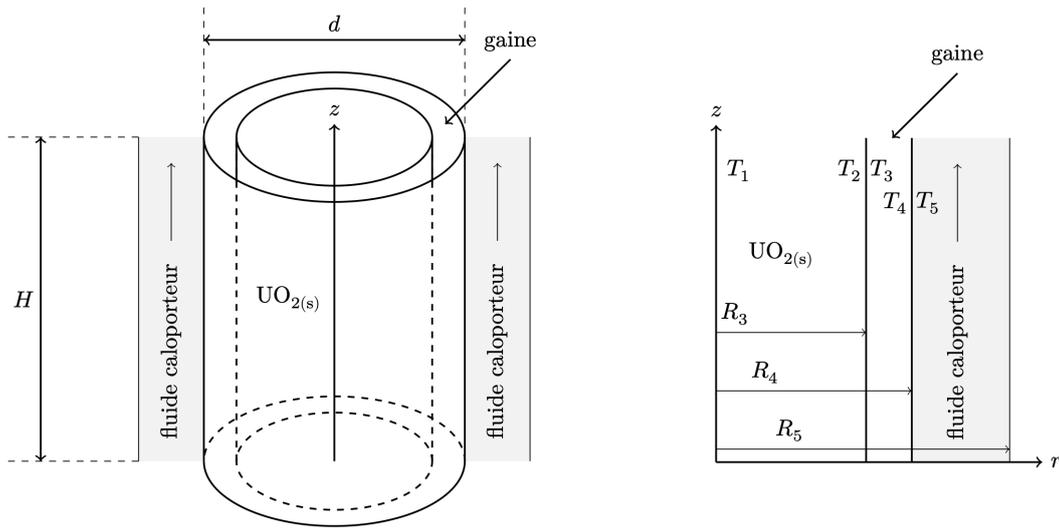


Figure 1

- Q1. Exprimer la surface latérale totale, notée S_{tot} , de l'ensemble des N crayons combustibles entourés de la gaine en fonction de N , d et H .

On note P_V la puissance thermique par unité de volume engendrée par les réactions de fission au cœur des crayons combustibles et que l'on suppose uniforme. On appelle r la distance à l'axe du cylindre modélisant l'ensemble des N crayons.

- Q2. Montrer que l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0.$$

Exprimer A en fonction de P_V et λ_2 .

- Q3. Exprimer la température $T(r)$ dans $UO_2(s)$ en fonction de P_V , T_2 , R_3 , λ_2 et r .
- Q4. Exprimer la température T_3 en fonction de T_2 , P_1 , h_2 , d , e , H et N .
- Q5. Exprimer la température $T(r)$ en un point de la gaine en fonction de T_4 , P_1 , R_4 , λ_3 , S_{tot} et r .
- Q6. Calculer les températures T_4 , T_3 , T_2 et T_1 .
- Q7. Représenter le profil température $T(r)$ pour $0 \leq r \leq R_5$.
- Q8. Expliquer pourquoi le bon fonctionnement du pressuriseur du circuit primaire fait partie des critères majeurs de sûreté. Proposer une solution pour pouvoir évacuer une puissance plus importante.

II Prise en compte de dépendances longitudinales pour la puissance thermique volumique et la température

Dans cette partie, on néglige l'influence de la gaine mais on tient compte du profil non uniforme, selon la coordonnée z , de la puissance thermique générée par les réactions de fission, ainsi que de la dépendance avec z du champ de température.

Chaque crayon combustible de rayon R_4 et de hauteur H est refroidi par une circulation d'eau liquide dans un espace annulaire de rayon extérieur R_5 entourant le crayon. On ne considère dans cette sous-partie qu'un seul crayon.

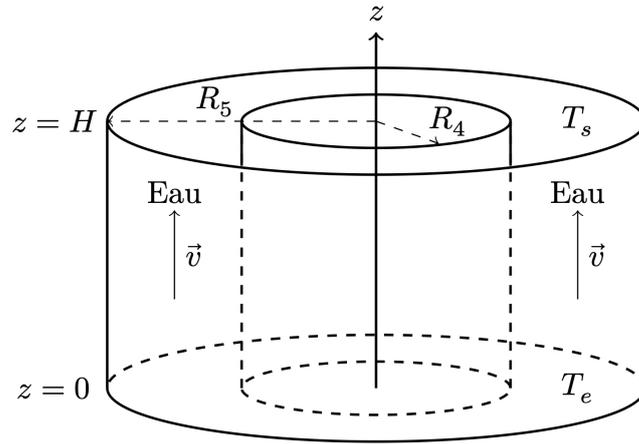


Figure 2

La puissance thermique $P_V(z)$ par unité de volume engendrée par les réactions de fission au sein de la barre du combustible est modélisée par : $P_V(z) = P_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$. On suppose que les échanges thermiques se font toujours exclusivement dans la direction radiale de la barre de combustible. On appelle r la distance à l'axe du cylindre.

L'eau liquide circule à la vitesse $v = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$ avec un débit massique $D_m = 0,30 \text{ kg.s}^{-1}$; la température d'entrée (en $z = 0$) de l'eau liquide est $T_e = 284^\circ\text{C}$ et sa température de sortie (en $z = H$) est $T_s = 322^\circ\text{C}$. La capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée constante sur cette plage de température, est prise égale à $c_5 = 5750 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. On admet qu'il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur pour $r = R_5$.

Dans la suite, on suppose que la température de l'eau liquide ne dépend que de z et on la note $T(z)$; la température dans la barre de combustible dépend de r et z et est notée $T_c(r, z)$.

- Q9. En réalisant un bilan thermodynamique pendant dt pour l'eau liquide entre les cotes z et $z + dz$ (avec $dz \ll z$), en écoulement stationnaire dans l'espace annulaire, justifier que :

$$D_m c_5 [T(z + dz) - T(z)] = P_V(z) \pi R_4^2 dz.$$

- Q10. Exprimer $T_s - T_e$ en fonction de R_4 , H , D_m , c_5 et P_0 . Exprimer la température $T(z)$ de l'eau liquide en fonction de T_e , T_s , z et H .

On note h_{cc} le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de combustible et l'eau liquide dans ce modèle, et $T_p(z)$ la température de la paroi de la barre de combustible à l'altitude z .

- Q11. Montrer que :

$$\frac{T_p(z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + B \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + C \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right].$$

Exprimer B et C en fonction de h_{cc} , H , D_m , c_5 et R_4 .

- Q12. Déterminer la température $T_c(r, z)$ dans la barre de combustible. Montrer que :

$$\frac{T_c(r, z) - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + D \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right] + \left[E + F \left(1 - \frac{r^2}{R_4^2} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right).$$

Exprimer D , E et F en fonction de D_m , c_5 , H , h_{cc} , λ_2 et R_4 .

- Q13. Exprimer la température $T_c(r = 0, z)$ sur l'axe de la barre de combustible à l'altitude z en fonction de T_e , T_s , D_m , z , H , c_5 , h_{cc} , λ_2 et R_4 .

- Q14. En déduire l'altitude pour laquelle la température sur l'axe de la barre de combustible est maximale. Calculer la valeur de la température maximale sur l'axe; on prendra $h_{cc} = 33 \text{ kW.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Préciser si un critère de sureté en température est respecté.

Le graphe de la figure 3 représente l'évolution de la température de la paroi du crayon combustible avec la cote z . Justifier qualitativement son allure.

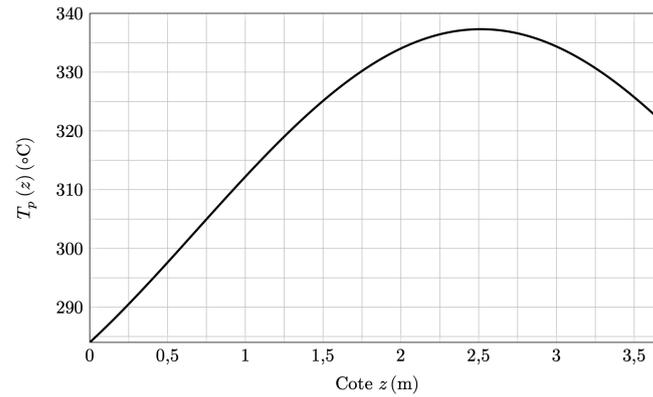


Figure 3 – Évolution spatiale de la température T_p de la paroi du crayon combustible.

Données

Coordonnées du point critique de l'eau : $T_C = 374^\circ\text{C}$, $p_C = 221$ bar.

Formule trigonométrique : $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[-\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.