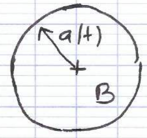
# Croissance d'une bulle de champagne




$N_g(t)$ molécules de $CO_2(g)$ GP

$C_g(t) = \frac{N_g(t)}{V(t)}$

$M(r\,\theta\,\varphi)$ $C(r,t)$ pour $r > a(t)$

$CO_2$

Equilibre chimique $C = \chi \frac{P_i}{k_B T}$

Ouverture de la bouteille $p_i \longrightarrow p_e < p_i$

A l'interface équilibre chimique

$$\left.\begin{aligned} C(r=a,t) &= \chi \frac{P_e}{k_B T} \\ C(r=\infty,t) &= \chi \frac{P_i}{k_B T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{j} = j(r,t)\vec{e_r}$$

loi de Fick.

1) $\Phi(r)$ = flux en dioxyde de carbone selon $\vec{e_r}$ à travers la sphère de rayon $r$

$$\boxed{\Phi(r) = 4\pi r^2 j(r)}$$

en particules pour $r > a(t)$

2) En régime stationnaire, pour $r > a(t)$ il y a conservation du flux :

$$4\pi r^2 j(r) = cte = \Phi_0$$

$$\Leftrightarrow \quad j(r) = \frac{\Phi_0}{4\pi r^2}$$

Or d'après la loi de Fick $j(r) = -D \frac{dC}{dr}$

$\vec{j} = -D\,\overrightarrow{grad}\,C$

Il vient $\frac{dC}{dr} = -\frac{\Phi_0}{D\,4\pi r^2}$

$$C(r) = \frac{\Phi_0}{D\,4\pi r} + \alpha$$

$$\boxed{C(r) = \frac{\beta}{r} + \alpha}$$

avec $\beta = \frac{\Phi_0}{4\pi D}$

3) Conditions aux limites :

$$C(a(t)) = \frac{\beta}{a(t)} + \alpha = \chi \frac{P_e}{k_B T}$$

$$C(\infty) = \alpha = \chi \frac{P_i}{k_B T}$$

Soit $c(a(t)) = \frac{\chi}{k_B T}\left[(P_e - P_i)\frac{a(t)}{r} + P_i\right]$

$c(a(t)) = \frac{\chi P_i}{k_B T}\Big[1$ [redacted] $\left(1 - \frac{P_e}{P_i}\right)\frac{a(t)}{r}\Big]$

$$\boxed{\alpha = \chi \frac{P_i}{k_B T}}$$

$$\boxed{\beta = \chi \frac{P_e - P_i}{k_B T}\,a(t)}$$

4) $\frac{dN_g}{dt} = -\Phi_0$ Bilan de particules pour la bulle entre $t$ et $t+dt$

$$= -4\pi a^2(t)\, j(a(t))$$

$$= +4\pi a^2(t)\, D\, \frac{dC}{dr}(a(t))$$

$$\frac{dN_g}{dt} = 4\pi D \; a^2(t)\left(-\frac{B}{a^2(t)}\right)$$

$$\boxed{\frac{dN_g}{dt} = 4\pi D \; \chi \frac{P_i - P_e}{k_B T} a(t)}$$

5. $\Sigma_1$ = bulle de $CO_2$, d'après l'équation d'état des GP

$$P_e \frac{4}{3}\pi a^3(t) = N_g(t) k_B T$$

En dérivant par rapport au temps

$$\frac{da}{dt} P_e 4\pi a^2(t) = \frac{dN_g}{dt} k_B T$$

$$= 4\pi D \chi (P_i - P_e) a(t)$$

D'où $\boxed{a(t)\frac{da}{dt}(t) = \underbrace{D\chi\left(\frac{P_i}{P_e} - 1\right)}_{k}}$

$$[K] = [D] \times [\chi]$$

$$= L^2 T^{-1} \times \underbrace{\frac{[k_B T C]}{[P_i]}}_{=1.\ \text{cf GP.}}$$

$$[k] = L^2 T^{-1}$$ Ok

6. On a, en intégrant $\frac{a^2(t)}{2} = kt + \text{cte}$

Avec à $t=0$ $a(0) = a_0$ = cte.

$$\boxed{a^2(t) = 2kt + a_0^2}$$

et $k = D\chi\left(\frac{P_i}{P_e} - 1\right)$

AN $k = 3\,10^{-9} \times 0{,}7 \times (3. - 1)$

$$= 42.10^{-10} = \underline{4{,}2\,10^{-9}\ m^2 s^{-1}.}$$

$$\tau = \frac{a^2(t) - a_0^2}{2k}$$

$$\tau = \frac{10^{-10} - 10^{-12}}{8\,10^{-9}}$$

$\underline{\tau \simeq 1{,}2\,10^{-2}\ s}$